государственное образовательное учреждение дополнительного профессионального образования (повышения квалификации) специалистов
«Кузбасский региональный институт повышения квалификации и переподготовки работников образования»
(ГОУ ДПО (ПК) С КРИПКиПРО)

# «Требования к оформлению задач по математике с развернутым ответом глазами эксперта предметной комиссии. Практикум по оцениванию задач с развернутым ответом»

**Трушкина Татьяна Петровна,** *методист кафедры ЕНиМД, председатель предметной комиссии на ОГЭ по математике*

# Задание № 20

| Баллы | Критерии оценки выполнения задания |
|---|---|
| 2 | Обоснованно получен верный ответ |
| 1 | Решение доведено до конца, но допущена описка или ошибка вычислительного характера, с её учётом дальнейшие шаги выполнены верно |
| 0 | Другие случаи, не соответствующие указанным критериям |
| 2 | *Максимальный балл* |

# Задание № 20

Решите уравнение $x^4=(2x-15)^2$.

Решение.
Исходное уравнение приводится к виду:

$$\left(x^2-2x+15\right)\left(x^2+2x-15\right)=0.$$

Уравнение $x^2-2x+15=0$ не имеет корней.
Уравнение $x^2+2x-15=0$ имеет корни $-5$ и $3$.
Ответ: $-5$; 3.

**В критериях - план решения для эксперта**

# Задание № 20

Решите уравнение $x^4=(2x-15)^2$.

**Решение.**

$x^4=(2x-15)^2$, $\left(x^2\right)^2-(2x-15)^2=0$, $\left(x^2-2x+15\right)\left(x^2+2x-15\right)=0$.

Произведение двух множителей равно нулю, если один из множителей равен нулю. Получаем: $x^2-2x+15=0$ или $x^2+2x-15=0$.

$x^2-2x+15=0$, $x^2-2x+1+14=0$, $(x-1)^2=-14$ не имеет корней.

$x^2+2x-15=0$, $x^2+2x+1-16=0$, $(x+1)^2-4^2=0$, $(x+1-4)(x+1+4)=0$, $(x-3)(x+5)=0$

откуда $x-3=0$ или $x+5=0$; $x=3$ или $x=-5$.

**Ответ:** $-5$; 3.

# Задание № 20

Решите уравнение $x^4=(2x-15)^2$.

**Решение.**

$$x^4=(2x-15)^2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2=2x-15 \\ x^2=-2x+15 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} (x-1)^2=-14 \\ (x+1)^2=16 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x+1=4 \\ x+1=-4 \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=3 \\ x=-5. \end{array}\right.$$

**Ответ:** $\{-5;3\}$.

# Задание № 20

Решите уравнение $(x-1)^4-2(x-1)^2-3=0$.

**Решение.**

Пусть $t=(x-1)^2$, тогда уравнение принимает вид:

$$t^2-2t-3=0,$$

откуда $t=-1$ или $t=3$.

Уравнение $(x-1)^2=-1$ не имеет корней.

Уравнение $(x-1)^2=3$ имеет корни $1-\sqrt{3}$ и $1+\sqrt{3}$.

**Ответ:** $1-\sqrt{3}$; $1+\sqrt{3}$.

**В критериях - план решения для эксперта**

# Задание № 20

Решите уравнение $(x-1)^4-2(x-1)^2-3=0$.

**Решение.**

$(x-1)^4-2(x-1)^2-3=0$,

$(x-1)^4-2(x-1)^2+1-4=0$, $\left((x-1)^2-1\right)^2-2^2=0$,

$\left((x-1)^2-1-2\right)\left((x-1)^2-1+2\right)=0$, $\left((x-1)^2-3\right)\left((x-1)^2+1\right)=0$, откуда

$(x-1)^2-3=0$ или $(x-1)^2+1=0$.

Уравнение $(x-1)^2=-1$ не имеет корней.

Уравнение $(x-1)^2=3$; $x-1=\sqrt{3}$ или $x-1=-\sqrt{3}$; $x=1+\sqrt{3}$ или $x=1-\sqrt{3}$.

**Ответ:** $1-\sqrt{3}$; $1+\sqrt{3}$.

# Задание № 20

Решите уравнение $(x-1)^4-2(x-1)^2-3=0$.

**Решение.**

$$(x-1)^4-2(x-1)^2-3=0 \Leftrightarrow \left((x-1)^2-1\right)^2=2^2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}(x-1)^2=3\\(x-1)^2=-1\end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x-1=\sqrt{3}\\x-1=-\sqrt{3}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=1+\sqrt{3}\\x=1-\sqrt{3}.\end{array}\right.$$

**Ответ:** $\left\{1-\sqrt{3};1+\sqrt{3}\right\}$.

# Решение ученика

## № 20 с 2021

Решите уравнение $(x-1)^4-2(x-1)^2-3=0$.

**Ответ:** $1-\sqrt{3}$; $1+\sqrt{3}$.

21) $(x-1)^4-2(x-1)^2-3=0$   Пусть $(x-1)^2=t$

$t^2-2t-3=0$

по т. Виета   по т. обр. т. Виета

$t_1+t_2=2$ | $t_1=-1$ не удовлетворяет условию

$t_1 t_2=-3$ | $t_2=3$

$(x-1)^2=t$   $t=3$

$(x-1)^2=3$

$1x^2-2x+1-3=0$

$x^2-2x-2=0$

$D=b^2-4ac=4+8=12$

$x_1=\frac{-b-\sqrt{D}}{2a}=\frac{2-\sqrt{12}}{2}=\frac{2-2\sqrt{3}}{2}$

$x_2=\frac{-b+\sqrt{D}}{2a}=\frac{2+\sqrt{12}}{2}=\frac{2+2\sqrt{3}}{2}$

Ответ: $\frac{2-2\sqrt{3}}{2}$; $\frac{2+2\sqrt{3}}{2}$

**? баллов**

## Решение ученика

## № 20 с 2021

Решите уравнение $(x-1)^4-2(x-1)^2-3=0$.

**Ответ:** $1-\sqrt{3}$; $1+\sqrt{3}$.

21) $(x-1)^4-2(x-1)^2-3=0$ Пусть $(x-1)^2=t$

$t^2-2t-3=0$

пот. Виета | пот. обр. т. Виета

$t_1+t_2=2$ | $t_1=-1$ не удовлетворяет условию

$t_1 t_2=-3$ | $t_2=3$

$(x-1)^2=t$ $t=3$

$(x-1)^2=3$

$x^2-2x+1-3=0$

$x^2-2x-2=0$

$D=b^2-4ac=4+8=12$

$x_1=\frac{-b-\sqrt{D}}{2a}=\frac{2-\sqrt{12}}{2}=\frac{2-2\sqrt{3}}{2}$

$x_2=\frac{-b+\sqrt{D}}{2a}=\frac{2+\sqrt{12}}{2}=\frac{2+2\sqrt{3}}{2}$

Ответ: $\frac{2-2\sqrt{3}}{2}$; $\frac{2+2\sqrt{3}}{2}$

**0 баллов**

**Пример 3.** Найдём подбором корни уравнения

$$x^2 - x - 12 = 0.$$

▶ Дискриминант $D = 1 - 4 \cdot 1 \cdot (-12)$ — положительное число. Пусть $x_1$ и $x_2$ — корни уравнения. Тогда

$$x_1 + x_2 = 1 \text{ и } x_1 \cdot x_2 = -12.$$

Если $x_1$ и $x_2$ — целые числа, то они являются делителями чи-сла $-12$. Учитывая также, что сумма этих чисел равна 1, не-трудно догадаться, что $x_1 = -3$ и $x_2 = 4$. ◁

Если используем теорему Виета, то обязательно вычисляем $D$, указываем, что $D > 0$ и уравнение имеет 2 корня.

**Пример.** Решить уравнение $x^2 - 5x + 6 = 0$.

$D = 25 - 24 = 1;\ D > 0$, значит уравнение имеет два корня.

По т. Виета получаем $x_1 = 2;\ x_2 = 3$.

## Решение ученика

## № 20 с 2021

Решите уравнение $(x-1)^4-2(x-1)^2-3=0$.

**Ответ:** $1-\sqrt{3}$; $1+\sqrt{3}$.

$\sqrt{21}$. $(x-1)^4-2(x-1)^2-3=0$.

$(x-1)^4=t^2$

$(x-1)^2=t$

$t^2-2t-3=0$.

$D=4+12=16=4^2$

$x=\frac{2\pm4}{2}=\begin{cases}3\\-1\end{cases}$

$(x-1)^2=3$

$x^2-2x+1=3$.

$x^2-2x-2=0$.

$D=4+8=12=2\sqrt{3}$

$x=\frac{2\pm2\sqrt{3}}{2}=\frac{2(1\pm\sqrt{3})}{2}=1\pm\sqrt{3}$

$(x-1)^2=-1$

нет решений, т.к. квадрат не может быть отрицательным.

Ответ: $1+\sqrt{3}$; $1-\sqrt{3}$.

**0 баллов**

# Решение ученика

**№ 20 с 2021 года**

**20** Решите уравнение $\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x}-6=0$.

**Ответ:** $-\frac{1}{2}$; $\frac{1}{3}$.

$$\frac{1}{x^2}^{\backslash 1}-\frac{1}{x}^{\backslash x}-6^{\backslash x^2}=0$$

$$\frac{1-x-6x^2}{x^2}=0 \qquad ОДЗ: x^2\neq 0,\ x\neq 0$$

$$1-x-6x^2=0 \mid \cdot(-1)$$

$$6x^2+x-1=0$$

$$D=1-4\cdot(-1)\cdot 6=25=5^2$$

$$x_{1,2}=\frac{-1\pm 5}{12}$$

$$x_1=\frac{-1+5}{12}=\frac{\cancel{4}^1}{\cancel{12}_3}=\frac{1}{3}$$

$$x_2=\frac{-1-5}{12}=\frac{-6}{12}=-\frac{1}{2}$$

Ответ. $x_1=\frac{1}{3}$; $x_2=-\frac{1}{2}$

**? баллов**

# Решение ученика

## № 20 с 2021 года

**20** Решите уравнение $\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x}-6=0$.

**Ответ:** $-\frac{1}{2}$; $\frac{1}{3}$.

$$\frac{1}{x^2}^{(1} - \frac{1}{x}^{(x} - 6^{(x^2} = 0$$

$$\frac{1-x-6x^2}{x^2}=0 \qquad \text{ОДЗ: } x^2 \neq 0,\ x \neq 0$$

$$1-x-6x^2=0 \mid \cdot(-1)$$

$$6x^2+x-1=0$$

$$D=1-4\cdot(-1)\cdot 6=25=5^2$$

$$x_{1,2}=\frac{-1\pm 5}{12}$$

$$x_1=\frac{-1+5}{12}=\frac{\cancel{4}^{1}}{\cancel{12}_{3}}=\frac{1}{3}$$

$$x_2=\frac{-1-5}{12}=\frac{-6}{12}=-\frac{1}{2}$$

Ответ. $x_1=\frac{1}{3}$; $x_2=-\frac{1}{2}$

**2 балла**

**Пример 2.** Решим дробное рациональное уравнение

$$\frac{x-3}{x-5}+\frac{1}{x}=\frac{x+5}{x(x-5)}. \qquad (1)$$

▶ По аналогии с предыдущим примером умножим обе части уравнения на общий знаменатель дробей, т. е. на выражение $x(x-5)$. Получим целое уравнение

$$x(x-3)+x-5=x+5. \qquad (2)$$

Понятно, что каждый корень уравнения (1) является корнем уравнения (2). Но уравнение (2) может быть не равносильно исходному, так как мы умножили обе его части не на число, отличное от нуля, а на выражение, содержащее переменную, которое может обращаться в нуль. Поэтому не каждый корень уравнения (2) обязательно окажется корнем уравнения (1).

Упростив уравнение (2), получим квадратное уравнение

$$x^2-3x-10=0.$$

Его корни — числа $-2$ и $5$.

Проверим, являются ли числа $-2$ и $5$ корнями уравнения (1).

При $x=-2$ общий знаменатель $x(x-5)$ не обращается в нуль. Значит, число $-2$ — корень уравнения (1).

При $x=5$ общий знаменатель обращается в нуль и выражения $\frac{x-3}{x-5}$ и $\frac{x+5}{x(x-5)}$ теряют смысл. Поэтому число 5 не является корнем уравнения (1).

Итак, корнем уравнения (1) служит только число $-2$. ◁

Вообще при решении дробных рациональных уравнений целесообразно поступать следующим образом:

1) найти общий знаменатель дробей, входящих в уравнение;
2) умножить обе части уравнения на общий знаменатель;
3) решить получившееся целое уравнение;
4) исключить из его корней те, которые обращают в нуль общий знаменатель.

# Решение ученика

21) $\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x} - 6 = 0$

$\frac{1 - x - 6x^2}{x^2} = 0 \quad | \cdot x^2$

$x \neq 0$

$-6x^2 - x + 1 = 0$

$D = 1 - 4 \cdot (-6) \cdot 1 = 25 = 5^2$

$x_1 = -0,5$

$x_2 = \frac{1}{3}$

Ответ: $x_1 = -0,5$; $x_2 = \frac{1}{3}$

**№ 20 с 2021 года**

| 20 | Решите уравнение $\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x} - 6 = 0$. |
|---|---|

**Ответ:** $-\frac{1}{2}; \frac{1}{3}$.

**? баллов**

# Решение ученика

## № 20 с 2021 года

**20** Решите уравнение $\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x}-6=0$.

**Ответ:** $-\frac{1}{2}$; $\frac{1}{3}$.

21) $\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x}-6=0$

$\frac{1-x-6x^2}{x^2}=0 \quad |:x^2$

$x\neq 0$

$-6x^2-x+1=0$

$D=1-4\cdot(-6)\cdot 1=25=5^2$

$x_1=-0,5$

$x_2=\frac{1}{3}$

Ответ: $x_1=-0,5$; $x_2=\frac{1}{3}$

**Нет вычислений для х**

**0 баллов**

# № 20 с 2021

Решите неравенство $(x-7)^2 < \sqrt{11}(x-7)$.

**Решение.**

$(x-7)^2 < \sqrt{11}(x-7)$; $x^2 - \left(14+\sqrt{11}\right)x + 49 + 7\sqrt{11} < 0$.

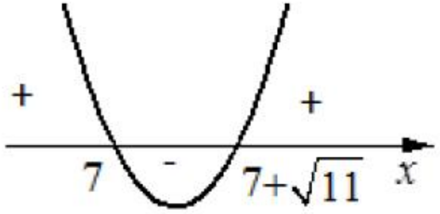
Рассмотрим функцию $y = x^2 - \left(14+\sqrt{11}\right)x + 49 + 7\sqrt{11}$. Квадратичная функция, графиком является парабола, ветви которой направлены вверх.

Найдем нули функции: $x^2 - \left(14+\sqrt{11}\right)x + 49 + 7\sqrt{11} = 0$;

$x = \dfrac{14+\sqrt{11}-\sqrt{11}}{2}$, $x = \dfrac{14+\sqrt{11}+\sqrt{11}}{2}$; $x = 7$, $x = 7+\sqrt{11}$.

Схематично изобразим параболу

$y = x^2 - \left(14+\sqrt{11}\right)x + 49 + 7\sqrt{11}$.




$y < 0$ при $x \in (7; 7+\sqrt{11})$

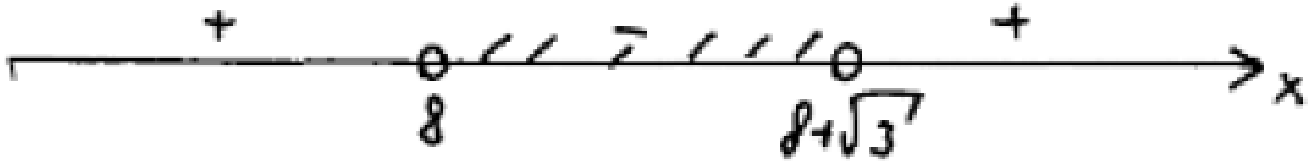
**Ответ:** $(7; 7+\sqrt{11})$.

# № 20 с 2021

$$(x-8)^2 < \sqrt{3}(x-8)$$

$$\cancel{(x-8)(x-8} \quad (x-8)^2 - \sqrt{3}(x-8) < 0$$

$$(x-8)(x-8-\sqrt{3}) < 0$$




$x \in (8, 8+\sqrt{3})$

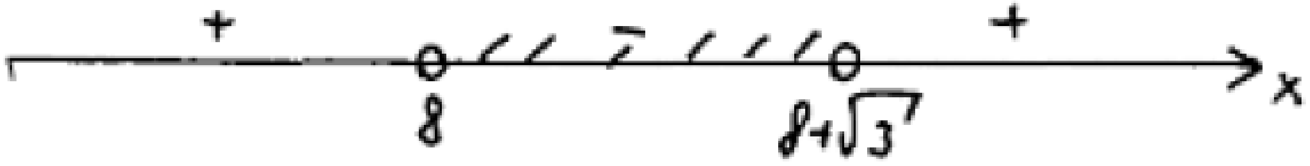
Ответ $x \in (8, 8+\sqrt{3})$

# № 20 с 2021

$$(x-8)^2 < \sqrt{3}(x-8)$$

$$\cancel{(x-8)(x-8} \quad (x-8)^2 - \sqrt{3}(x-8) < 0$$

$$(x-8)(x-8-\sqrt{3}) < 0$$




$$x \in (8, 8+\sqrt{3})$$

Ответ $x \in (8, 8+\sqrt{3})$

$$\boldsymbol{f(x) = (x-8)\left(x-8-\sqrt{3}\right)}$$

$$\boldsymbol{(x-8)\left(x-8-\sqrt{3}\right) = 0}$$

1) $x - 8 = 0 \qquad x = 8$

2) $x - 8 - \sqrt{3} = 0 \quad x = 8 + \sqrt{3}$

# Задание № 21

| Баллы | Содержание критерия |
|---|---|
| 2 | Ход решения задачи верный, получен верный ответ |
| 1 | Ход решения верный, все его шаги присутствуют, но допущена описка или ошибка вычислительного характера |
| 0 | Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше |
| *2* | *Максимальный балл* |

# Задание № 21

Первые 105 км автомобиль ехал со скоростью 35 км/ч, следующие 120 км — со скоростью 60 км/ч, а последние 500 км — со скоростью 100 км/ч. Найдите среднюю скорость автомобиля на протяжении всего пути.

Решение.
Заметим, что всего автомобиль проехал $105+120+500=725$ (км), затратив на весь путь $\frac{105}{35}+\frac{120}{60}+\frac{500}{100}=10$ (часов). Таким образом, его средняя скорость равна $\frac{725}{10}=72{,}5$ (км/ч).
Ответ: 72,5 км/ч.

**В критериях - план решения для эксперта**

# Задание № 21

Первые 105 км автомобиль ехал со скоростью 35 км/ч, следующие 120 км — со скоростью 60 км/ч, а последние 500 км — со скоростью 100 км/ч. Найдите среднюю скорость автомобиля на протяжении всего пути.

**Решение.**

Автомобиль проехал 105 км со скоростью 35 км/ч за 3 часа;

120 км со скоростью 60 км/ч за 2 часа;

500 км со скоростью 100 км/ч за 5 часов.

Всего автомобиль проехал $105+120+500=725$ (км).

На весь путь автомобиль затратил 3 + 2 + 5 = 10 (часов).

Средняя скорость равна $\frac{725}{10}=72{,}5$ (км/ч).

**Ответ:** 72,5 км/ч.

# Задание № 21

Моторная лодка прошла против течения реки 77 км и вернулась в пункт отправления, затратив на обратный путь на 2 часа меньше, чем на путь против течения. Найдите скорость лодки в неподвижной воде, если скорость течения реки равна 4 км/ч.

**Решение.**
Пусть скорость моторной лодки в неподвижной воде равна $v$ км/ч.

Получаем уравнение: $\frac{77}{v-4}-\frac{77}{v+4}=2$; $77v+308-77v+308=2v^2-32$;

$v^2=324$, откуда $v=18$.

**Ответ:** 18 км/ч.

---

**В критериях - план решения для эксперта**

# Задание № 21

Моторная лодка прошла против течения реки 77 км и вернулась в пункт отправления, затратив на обратный путь на 2 часа меньше, чем на путь против течения. Найдите скорость лодки в неподвижной воде, если скорость течения реки равна 4 км/ч.

**Решение.**

Пусть скорость мотроной лодки в неподвижной воде равна $v$ км/ч, тогда

против течения реки скорость лодки $v-4$ км/ч, время $\dfrac{77}{v-4}$ ч;

по течению реки скорость лодки $v+4$ км/ч, время $\dfrac{77}{v+4}$ ч;

время движения лодки против течения на 2 ч больше времени движения по течению, тогда получаем уравнение: $\dfrac{77}{v-4}-\dfrac{77}{v+4}=2$.

$77v+308-77v+308=2v^2-32$ при $v \neq \pm 4$.

$v^2=324$, $v=-18$ или $v=18$; оба корня $v=-18$ и $v=18$ удовлетворяют условию $v \neq \pm 4$.

Корень $v=-18$ не удовлетворяет условию задачи (скорость – велгчина положительная), корень $v=18$ удовлетворяет условию задачи.

**Ответ:** 18 км/ч.

# Задание № 21

Моторная лодка прошла 77 км против течения реки и вернулась в пункт отправления, затратив на обратный путь на 2 часа меньше, чем на путь против течения. Скорость течения реки равна 4 км/ч. Найдите скорость лодки в неподвижной воде.

Ответ: **18 км/ч**

**Решение.**

Пусть $x$ км/ч – скорость лодки в неподвижной воде, $x > 0$

| | **V** км/ч | **S** км | **t** ч |
|---|---|---|---|
| Движение против течения | $x - 4$ | 77 | $\dfrac{77}{x-4}$ |
| Движение по течению | $x + 4$ | 77 | $\dfrac{77}{x+4}$ |

По условию, что на обратный путь затрачено на 2 часа меньше, составляем уравнение

$$\frac{77}{x-4} - \frac{77}{x+4} = 2;\ 77(x+4) - 77(x-4) = 2(x+4)(x-4);$$

$$77x + 77 \cdot 4 - 77x + 77 \cdot 4 = 2(x^2 - 16);$$

$x^2 = 324;\ x = \pm 18;$ т. к. $x > 0,$ то $x = 18.$

Ответ: 18 км/ч

# Задание № 21

**Пример 1.** Из пункта $A$ выехал велосипедист, а через 45 мин после него в том же направлении выехал грузовик, догнавший велосипедиста на расстоянии 15 км от пункта $A$. Найдите скорость велосипедиста и скорость грузовика, если скорость грузовика на 18 км/ч больше скорости велосипедиста.

**Решение.** Пусть скорость велосипедиста равна $x$ км/ч, тогда скорость грузовика составляет $(x + 18)$ км/ч. Велосипедист проезжает 15 км за $\frac{15}{x}$ ч, а грузовик — за $\frac{15}{x+18}$ ч. Поскольку грузовик проехал 15 км на 45 мин, то есть на $\frac{3}{4}$ ч, быстрее, чем велосипедист, то получаем уравнение $\frac{15}{x} - \frac{15}{x+18} = \frac{3}{4}$.

Решим это уравнение:

$$\frac{15}{x} - \frac{15}{x+18} = \frac{3}{4};$$

$$\frac{5}{x} - \frac{5}{x+18} = \frac{1}{4};$$

$$\frac{20x + 360 - 20x - x^2 - 18x}{4x(x+18)} = 0;$$

$$\begin{cases} x^2 + 18x - 360 = 0, \\ x \neq 0, \\ x \neq -18. \end{cases}$$

Решив квадратное уравнение системы, получим $x = 12$ или $x = -30$.

Корень $-30$ не удовлетворяет условию задачи.

Следовательно, скорость велосипедиста равна 12 км/ч, а скорость грузовика составляет $12 + 18 = 30$ (км/ч).

**Ответ:** 12 км/ч, 30 км/ч. ◄

# Решение ученика

## № 21 после 2021

Моторная лодка прошла 77 км против течения реки и вернулась в пункт отправления, затратив на обратный путь на 2 часа меньше, чем на путь против течения. Скорость течения реки равна 4 км/ч. Найдите скорость лодки в неподвижной воде.

Ответ: **18 км/ч**

№22

| | v | t | S |
|---|---|---|---|
| по теч | $x+4$ | $\frac{77}{x+4}$ | 77 |
| пр теч | $x-4$ | $\frac{77}{x-4}$ | 77 |

составим уравнение:

$$\frac{77}{x-4}-\frac{77}{x+4}=2$$

$$\frac{77(x+4)-77(x-4)-2(x^2-16)}{x^2-16}=0$$

ОДЗ: $x\neq 4$; $x\neq -4$

$$77(x+4-x+4)-2(x^2-16)=0$$

$$77\cdot 8-2x^2+32=0$$

$$616-2x^2+32=0$$

$$2x^2-648=0$$

$$x^2=324$$

$$x_1=18$$

$$x_2=-18$$

Ответ: 18

**? баллов**

# Решение ученика

## Задание № 21

Моторная лодка прошла 77 км по течению реки и вернулась в пункт отправления, затратив на обратный путь на 2 часа меньше, чем на путь против течения. Скорость течения реки равна 4 км/ч. Найдите скорость лодки в неподвижной воде.

Ответ: **18 км/ч**

х -?

№22

| | v ? | t ? | S ? |
|---|---|---|---|
| по теч | $x+4$ | $\frac{77}{x+4}$ | 77 |
| пр теч | $x-4$ | $\frac{77}{x-4}$ | 77 |

составим уравнение:

$$\frac{77}{x-4}-\frac{77}{x+4}=2$$ ?

$$\frac{77(x+4)-77(x-4)-2(x^2-16)}{x^2-16}=0$$

ОДЗ: $x\neq 4;\ x\neq -4$

$$77(x+4-x+4)-2(x^2-16)=0$$

$$77\cdot 8-2x^2+32=0$$

$$616-2x^2+32=0$$

$$2x^2-648=0$$

$$x^2=324$$

$$x_1=18$$

$$x_2=-18$$ ?

Ответ: 18 ?

**0 баллов**

# Задание № 21

Моторная лодка прошла 77 км по течению реки и вернулась в пункт отправления, затратив на обратный путь на 2 часа меньше, чем на путь против течения. Скорость течения реки равна 4 км/ч. Найдите скорость лодки в неподвижной воде.

Ответ: **18 км/ч**

# Решение ученика

N22

$S = 77$

$t_{\text{по теч}}$ на 2 ч < $t_{\text{против теч}}$

$V_{\text{теч}} = 4$ км/ч

$V_{л}$ – ?

Решение:

Пусть $x - V_{л}$, тогда $x+4 = V_{\text{по теч}}$, $x-4 = V_{\text{против теч}}$

$$\frac{77^{\backslash x-4}}{x+4} + 2^{\backslash x^2-16} = \frac{77^{\backslash x+4}}{x-4} \quad | \cdot (x+4)(x-4)$$

$77x - 308 + 2x^2 - 32 - 77x - 308 = 0$

$2x^2 - 648 = 0$

$x^2 - 324 = 0$

$x_{1,2} = \pm\sqrt{324}$

$x_1 = 18$ $\quad x_2 = -18$ не подходит по условию

Ответ 18 км/ч

**? баллов**

# Задание № 21

Моторная лодка прошла 77 км по течению реки и вернулась в пункт отправления, затратив на обратный путь на 2 часа меньше, чем на путь против течения. Скорость течения реки равна 4 км/ч. Найдите скорость лодки в неподвижной воде.

Ответ: **18 км/ч**

## Решение ученика

$S = 77$

$t_{\text{по теч}}$ на 2ч $< t_{\text{против теч}}$

$V_{\text{теч}} = 4$ км/ч

$V_{л} - ?$

Решение:

Пусть $x - V_л$, тогда $x+4 = V_{\text{по теч}}$, $x-4 = V_{\text{против теч}}$

$$\frac{77^{\,(x-4)}}{x+4} + 2^{\,(x^2-16)} = \frac{77^{\,(x+4)}}{x-4} \;\Big|\; x(x+4)(x-4)$$

$77x - 308 + 2x^2 - 32 - 77x - 308 = 0$

$2x^2 - 648 = 0$

$x^2 - 324 = 0$

$x_{1,2} = \pm\sqrt{324}$

$x_1 = 18$ $\quad x_2 = -18$ не подходит по условию

Ответ 18 км/ч

**0 баллов**

Два автомобиля одновременно отправляются в 240-километровый пробег. Первый едет со скоростью на 20 км/ч большей, чем второй, и прибывает к финишу на 1 ч раньше второго. Найдите скорость первого автомобиля.

**Ответ:** 80 км/ч.

# Задание № 21

## Решение ученика

№22

| | скор. | время | расстояние |
|---|---|---|---|
| I автом | $x$ км/ч | $\frac{240}{x}$ ч | 240 км |
| II автом | $x-20$ км/ч | $\frac{240}{x-20}$ ч | 240 км |

$$\frac{240}{x-20}-\frac{240}{x}=1 \qquad \frac{240x-240x-240\cdot20}{x(x-20)}=1$$

$$x^2-20x=4800$$

$$x^2-20x-4800=0$$

$$\left[\begin{array}{l} x_1=-60 \text{ (не удв.)} \\ x_2=80 \end{array}\right.$$

Ответ: 80 км/ч

**0 баллов**

# Задание № 22

| Баллы | Критерии оценки выполнения задания |
|---|---|
| 2 | График построен верно, верно найдены искомые значения параметра |
| 1 | График построен верно, но искомые значения параметра найдены неверно или не найдены |
| 0 | Другие случаи, не соответствующие указанным критериям |
| 2 | *Максимальный балл* |

# Задание № 22

Чтобы построить график квадратичной функции, нужно:
1) найти координаты вершины параболы и отметить её в координатной плоскости;
2) построить ещё несколько точек, принадлежащих параболе;
3) соединить отмеченные точки плавной линией.

**Пример 1.** Построим график функции $y = 0{,}5x^2 + 3x + 0{,}5$.

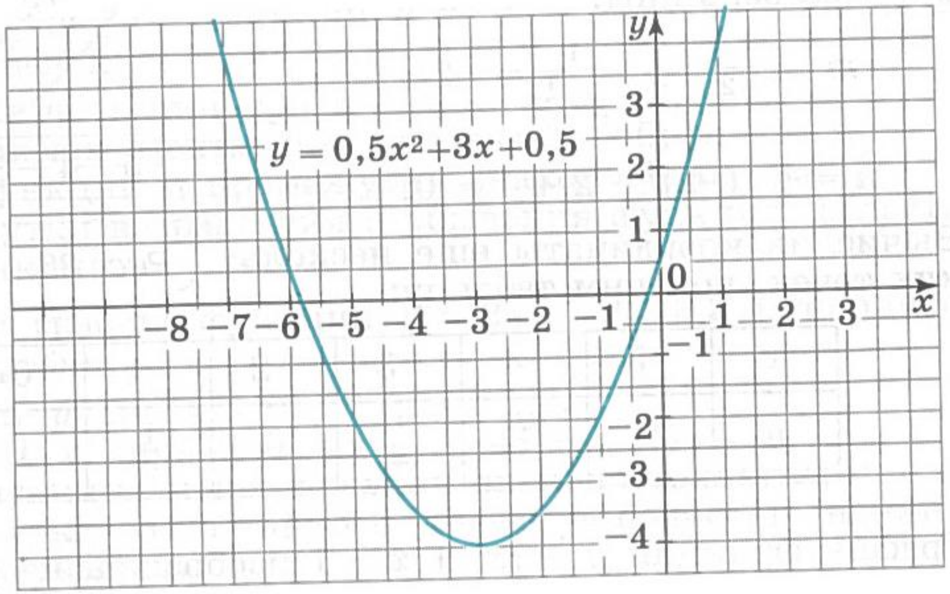
▶ Графиком функции $y = 0{,}5x^2 + 3x + 0{,}5$ является парабола, ветви которой направлены вверх. Найдём координаты $m$ и $n$ вершины этой параболы:

$$m = -\frac{b}{2a} = -\frac{3}{2 \cdot 0{,}5} = -3; \quad n = 0{,}5 \cdot (-3)^2 + 3 \cdot (-3) + 0{,}5 = -4.$$

Вершина параболы — точка $(-3; -4)$. Составим таблицу:

| $x$ | $-7$ | $-6$ | $-5$ | $-4$ | $-3$ | $-2$ | $-1$ | $0$ | $1$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | $4$ | $0{,}5$ | $-2$ | $-3{,}5$ | $-4$ | $-3{,}5$ | $-2$ | $0{,}5$ | $4$ |

Воспользовавшись этой таблицей, построим график функци $y = 0{,}5x^2 + 3x + 0{,}5$ (рис. 31). ◁




При составлении таблицы и построении графика учитывалось, что прямая $x = -3$ является осью симметрии параболы. Поэтому мы брали точки с абсциссами $-4$ и $-2$, $-5$ и $-1$, $-6$ и $0$, симметричные относительно прямой $x = -3$ (эти точки имеют одинаковые ординаты).

# Задание № 22

**Пример 1.** Построим график функции $y = \frac{2x+4}{x-1}$.

▶ Для этого выделим из дроби $\frac{2x+4}{x-1}$ целую часть, представив дробь в виде $n + \frac{k}{x-m}$.

Имеем

$$\frac{2x+4}{x-1} = \frac{2x-2+6}{x-1} = \frac{2(x-1)+6}{x-1} = 2 + \frac{6}{x-1}.$$

Здесь $k = 6$, $m = 1$, $n = 2$.

График функции $y = \frac{6}{x-1} + 2$ можно получить из графика функции $y = \frac{6}{x}$ с помощью двух параллельных переносов: сдвига гиперболы $y = \frac{6}{x}$ на 1 единицу вправо вдоль оси $x$ и сдвига полученного графика $y = \frac{6}{x-1}$ на 2 единицы вверх в направлении оси $y$. При этом преобразовании сдвинутся и асимптоты гиперболы $y = \frac{6}{x}$: ось $x$ перейдет в прямую $y = 2$, а ось $y$ — в прямую $x = 1$.

Для построения графика данной функции поступим так: проведем в координатной плоскости пунктиром асимптоты: прямую $x = 1$ и прямую $y = 2$. Так как гипербола состоит из двух ветвей, то для построения этих ветвей составим две

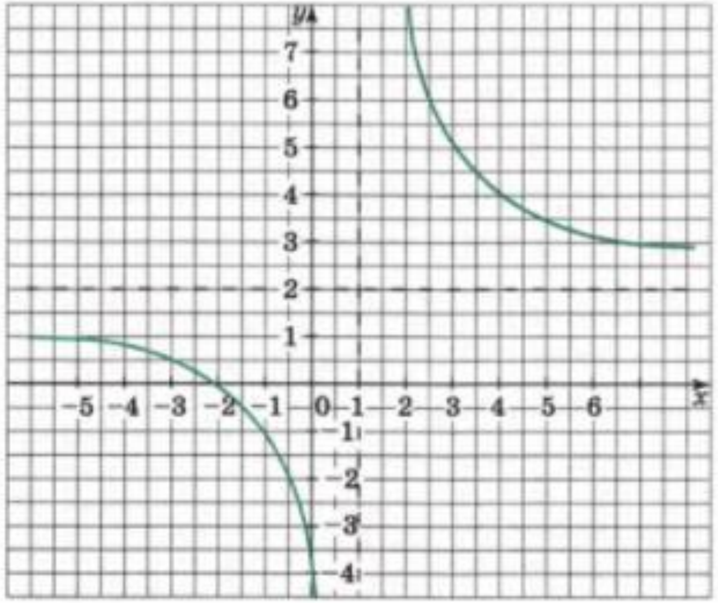



Рис. 45

таблицы: одну для $x < 1$, другую для $x > 1$.

| $x$ | −5 | −3 | −2 | −1 | 0 |
|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | 1 | 0,5 | 0 | −1 | −4 |

| $x$ | 2 | 3 | 4 | 5 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | 8 | 5 | 4 | 3,5 | 3 |

Отметив в координатной плоскости точки, координаты которых указаны в первой таблице, и соединив их плавной непрерывной линией, получим одну ветвь гиперболы. Аналогично, используя вторую таблицу, получим вторую ветвь гиперболы.

График функции $y = \frac{2x+4}{x-1}$ изображен на рисунке 45. ◁

## Задание № 22

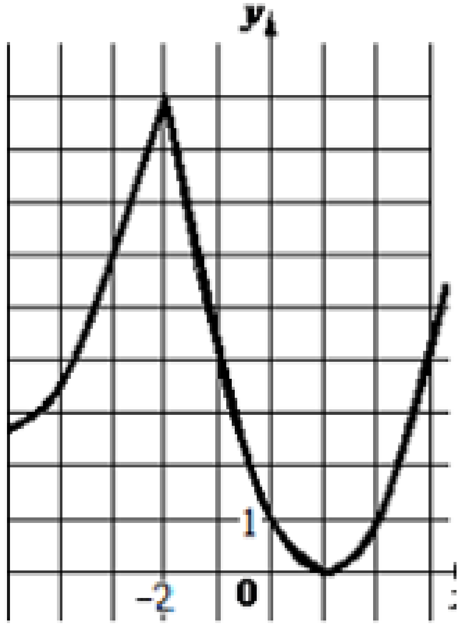
Постройте график функции

$$y = \begin{cases} x^2 - 2x + 1, \text{ если } x \geq -2, \\ -\dfrac{18}{x}, \text{ если } x < -2, \end{cases}$$

и определите, при каких значениях $m$ прямая $y = m$ имеет с графиком одну или две общие точки.

**Решение.**

Построим график функции $y = -\dfrac{18}{x}$ при $x < -2$ и график функции $y = x^2 - 2x + 1$ при $x \geq -2$.




Прямая $y = m$ имеет с графиком одну или две общие точки при $m = 0$ и при $m \geq 9$.

**Ответ:** 0; $[9; +\infty)$.

**В критериях - план решения для эксперта**

# Задание № 22

**Решение.**

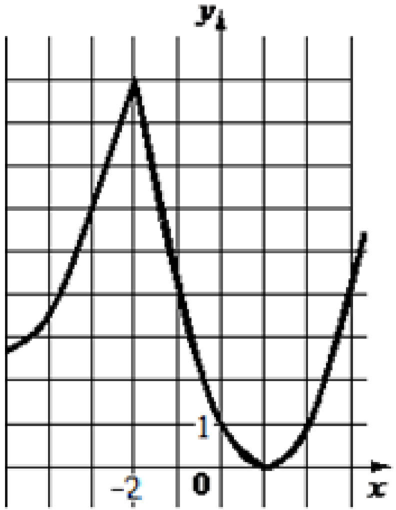
Построим график функции $y = -\frac{18}{x}$.

Графиком является гипербола, состоящая из двух ветвей, расположенных во второй и четвертой четвертях.
Так как нужна ветвь гиперболы при $x < -2$, то строим ветвь во второй четверти.

| $x$ | –1 | **–2** | –3 | –6 | –9 | –18 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | 18 | **9** | 6 | 3 | 2 | 1 |

Построим график функции $y = x^2 - 2x + 1$. Квадратичная функция, графиком является парабола, ветви которой направлены вверх.
Вершина параболы – (1; 0). Так нам нужна часть параболы при при $x \geq -2$, то вычислим координаты точек при $x \geq -2$, учитываю симметрию относительно прямой $x = 1$.

| $x$ | **–2** | –1 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | **9** | 4 | 1 | 0 | 1 | 4 | 9 |

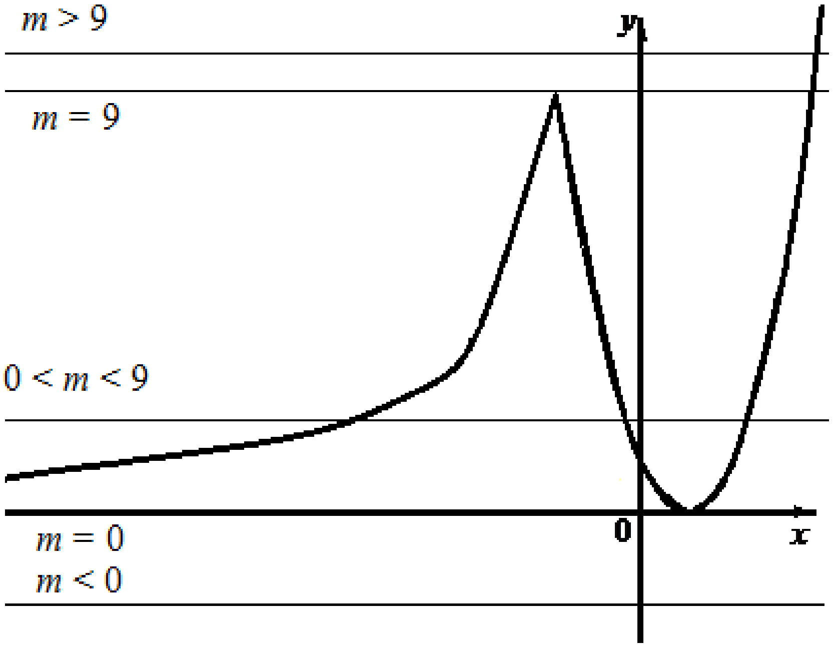



Оставим ветвь гиперболы при $x < -2$ и часть параболы при $x \geq -2$. (В точке $x = -2$ происходит «склейка» графиков.)

# Задание № 22

(*окончание*)

Построим семейство прямых $y = m$, параллельных или совпадающих с осью $Ox$.




При $m < 0$ прямая $y = m$ с графиком функции не имеет общих точек;
при $m = 0$ прямая $y = m$ с графиком функции имеет одну общую точку;
при $0 < m < 9$ прямая $y = m$ с графиком функции имеет три общих точки;
при $m = 9$ прямая $y = m$ с графиком функции имеет две общие точки;
при $m > 9$ прямая $y = m$ с графиком функции имеет одну общую точку.

Прямая $y = m$ имеет с графиком одну или две общие точки при $m = 0$ и при $m \geq 9$.

**Ответ:** 0; $[9; +\infty)$.

# Задание № 22

Постройте график функции

$$y=\begin{cases} x^2-2x+1, \text{ если } x\geq -2,\\ -\dfrac{18}{x}, \text{ если } x<-2, \end{cases}$$

и определите, при каких значениях $m$ прямая $y=m$ имеет с графиком одну или две общие точки.

**Ответ:** 0; $[9;+\infty)$.

? баллов

$$y=\begin{cases} x^2-2x+1 \text{ ; при } x\geqslant -2\\ -\dfrac{18}{x} \text{ ; при } x<-2 \end{cases}$$

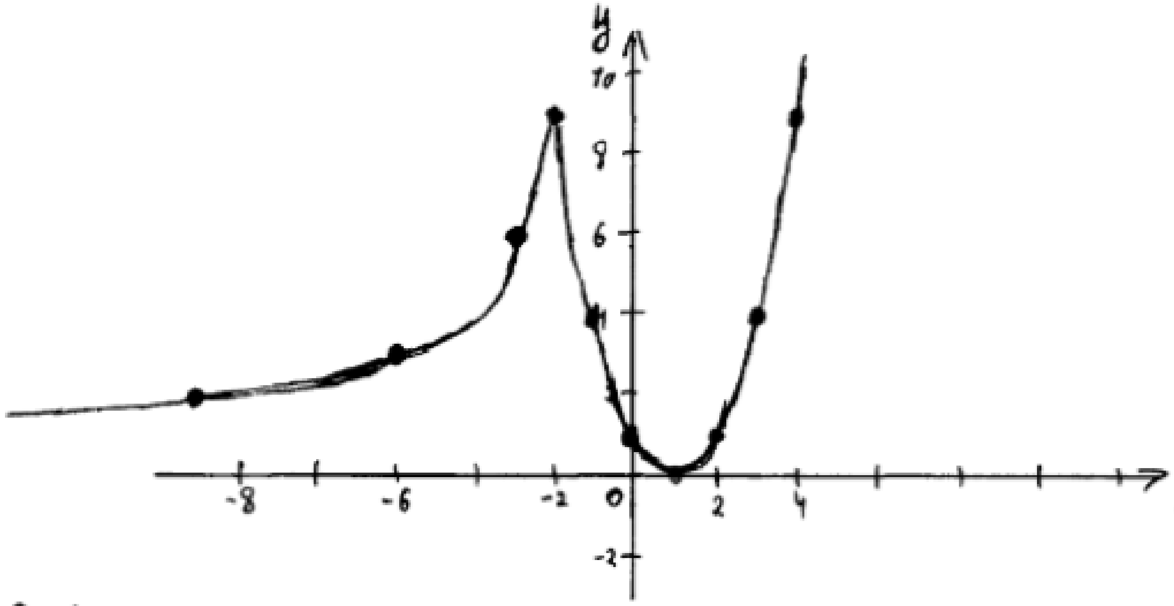
$-\dfrac{b}{2a}=\dfrac{2}{2}=1 \qquad y=1-2+1=0$

| x | -2 | -1 | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|---|---|
| y | 9 | 4 | 1 | 4 | 9 |

$y=x^2-2x+1$ ; при $x\geqslant -2$

| x | -9 | -6 | -3 |
|---|---|---|---|
| y | 2 | 3 | 6 |

$y=-\dfrac{18}{x}$, при $x<-2$




Ответ: при $m=0$ и $m\in[9;+\infty)$

# Задание № 22

Постройте график функции

$$y=\begin{cases} x^2-2x+1, \text{ если } x\geq -2, \\ -\dfrac{18}{x}, \text{ если } x<-2, \end{cases}$$

и определите, при каких значениях $m$ прямая $y=m$ имеет с графиком одну или две общие точки.

**Ответ:** 0; $[9;+\infty)$.

**0 баллов**

$$y=\begin{cases} x^2-2x+1 \text{ ; при } x\geq -2 \\ -\frac{18}{x} \text{ ; при } x<-2 \end{cases}$$

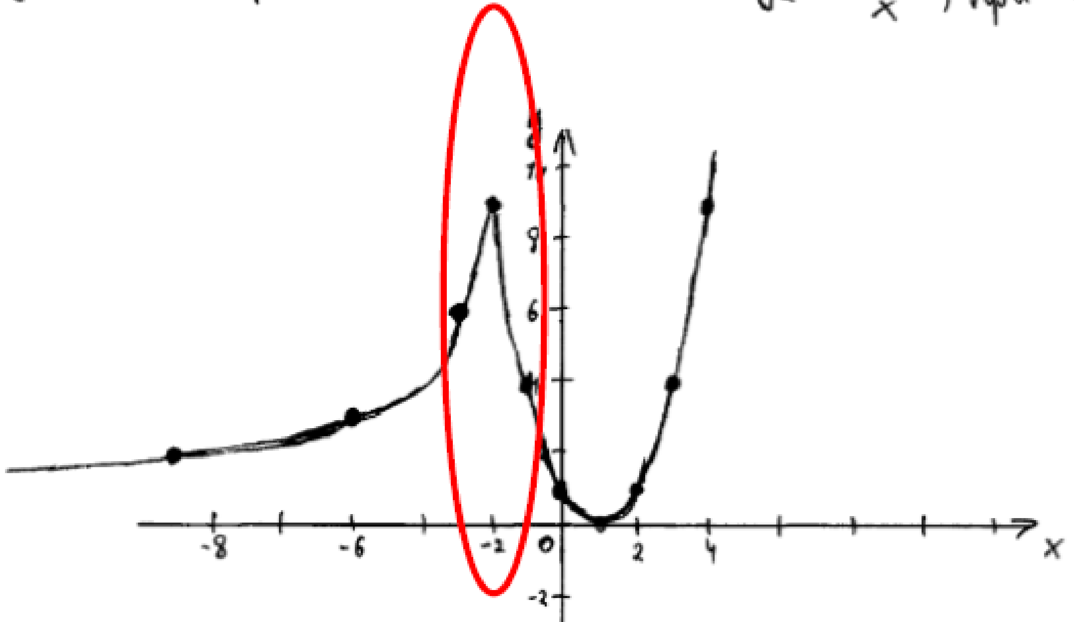
$-\frac{b}{2a}=\frac{2}{2}=1 \qquad y=1-2+1=0$

| $x$ | -2 | -1 | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | 9 | 4 | 1 | 4 | 9 |

$y=x^2-2x+1$ ; при $x\geq -2$

| $x$ | -9 | -6 | -3 | [illegible] |
|---|---|---|---|---|
| $y$ | 2 | 3 | 6 | [illegible] |

$y=-\frac{18}{x}$ , при $x<-2$




Ответ: при $m=0$ и $m\in[9;+\infty)$

# Задание № 22

$$y = \begin{cases} x^2 - 2x + 1, \text{ при } x \geq -2 \\ -\dfrac{18}{x}, \text{ при } x < -2 \end{cases}$$

1) $y = x^2 - 2x + 1$

$x_0 = \dfrac{-b}{2a} = \dfrac{2}{2} = 1$

$y_0 = (1)^2 - 2 \cdot 1 + 1 = 1 - 2 + 1 = 0$

$(1; 0)$ – вершина

| x | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|
| y | 1 | 4 | 9 |

| x | 0 | -1 | -2 |
|---|---|---|---|
| y | 1 | 4 | 9 |

2) $y = -\dfrac{18}{x}$

| x | 3 | 6 | 2 |
|---|---|---|---|
| y | -6 | -3 | -9 |

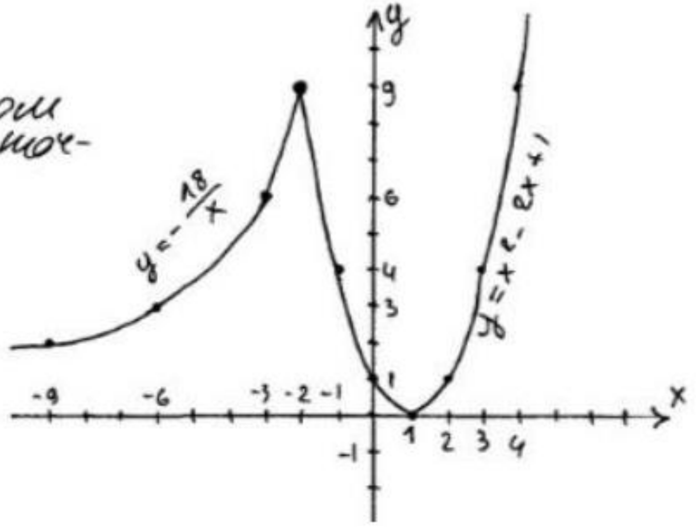
| x | -3 | -6 | -2 |
|---|---|---|---|
| y | 6 | 3 | 9 |

$y = m$

$m$ – ? (имеет с графиком одну или две общие точки)

$m = 0; [9; +\infty)$

Ответ: $0; [9; +\infty)$ – $m$




**0 баллов**

# Задание № 22

**23** Постройте график функции

$$y = \left|x^2 - 4x + 3\right|.$$

Какое наибольшее число общих точек график данной функции может иметь с прямой, параллельной оси абсцисс?

**Решение.**

Построим график функции $y = x^2 - 4x + 3$ при $x < 1$ и $x > 3$ и график функции $y = -x^2 + 4x - 3$ при $1 \le x \le 3$.

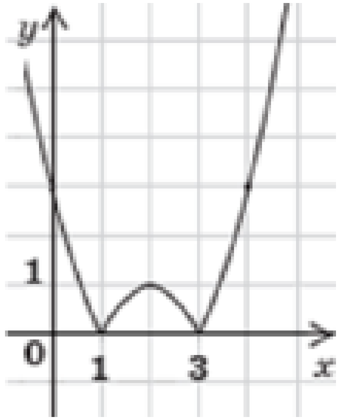



График данной функции может иметь с прямой, параллельной оси абсцисс, 0, 2, 3 или 4 общие точки.

**Ответ:** 4.

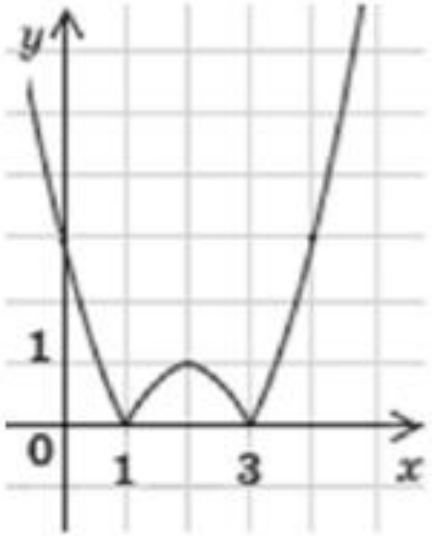
**В критериях - план решения для эксперта**

## Задание № 22

**Решение.**

$$y=\begin{cases} x^2-4x+3, \text{ если } x^2-4x+3\ge 0, \\ -x^2+4x-3, \text{ если } x^2-4x+3\le 0; \end{cases}$$

$$y=\begin{cases} x^2-4x+3, \text{ если } x\le 1 \text{ или } x\ge 3, \\ -x^2+4x-3, \text{ если } 1<x<3. \end{cases}$$




Построим график этой функции:

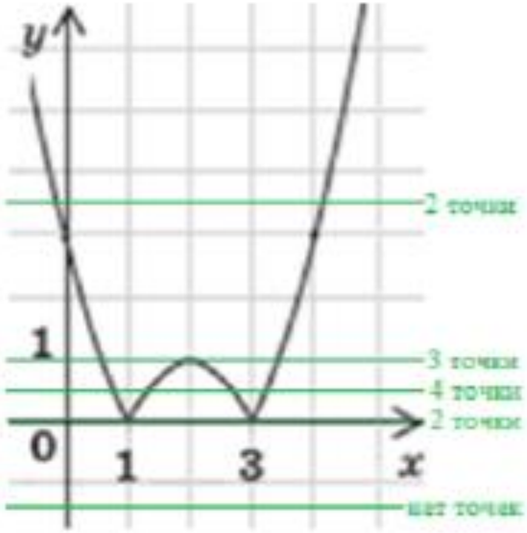
1) При $x<1$ и $x>3$ – часть параболы $y=x^2-4x+3$ – ветви направлены вверх, вершина имеет координаты $(2;\ -1)$ – расположенная в верхней полуплоскости относительно оси $Ox$.

2) При $1\le x\le 3$ – часть параболы $y=-x^2+4x-3$ – ветви направлены вниз, вершина имеет координаты $(2;\ 1)$ – расположенная в нижней полуплоскости относительно оси $Ox$.

Обе параболы проходят через точки $(1;\ 0)$ и $(3;\ 0)$.

Прямая, параллельная оси абсцисс, может иметь с построенным графиком функции 0, 2, 3 и 4 точки. Наибольшее число общих точек – 4.

**Ответ:** 4.

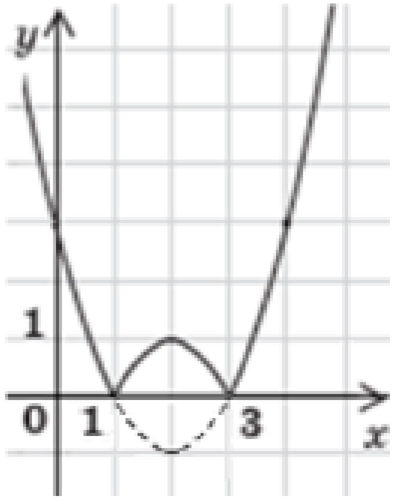


# Задание № 22

**Решение.**

$$|x^2-4x+3|=\begin{cases} x^2-4x+3, \text{ если } x^2-4x+3\ge 0, \\ -x^2+4x-3, \text{ если } x^2-4x+3\le 0; \end{cases}$$

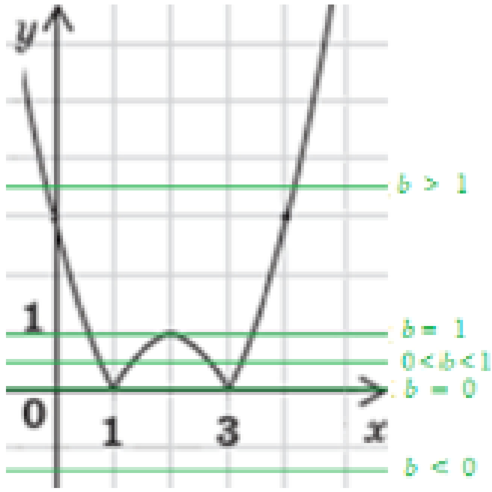
$$|x^2-4x+3|=\begin{cases} x^2-4x+3, \text{ если } x\le 1 \text{ или } x\ge 3, \\ -x^2+4x-3, \text{ если } 1<x<3. \end{cases}$$




Построим график функции $y=x^2-4x+3$. Графиком функции $y=x^2-4x+3$ является парабола, ветви которой направлены вверх, вершина имеет координаты (2; – 1).

При $x<1$ и $x>3$ графиком функции $y=|x^2-4x+3|$ будет часть параболы $y=x^2-4x+3$, расположенная в верхней полуплоскости относительно оси $Ox$.

2) При $1\le x\le 3$ графиком функции $y=|x^2-4x+3|$ будет другая часть параболы $y=x^2-4x+3$, отраженная симметрично относительно оси $Ox$ в верхнюю полуплоскость координатной плоскости.




Прямая, параллельная оси абсцисс, задается уравнением $y=b$. Эта прямая пересекает построенный график функции в 2, 3 или 4 точках или не пересекает его. Наибольшее число общих точек – 4.

**Ответ:** 4.

# Решение ученика

№23

Решение

Построим график функции $y=|x^2-4x+3|$ Графиком является парабола, $a=1$ (ветви направлены вверх)

Чтобы построить график функции $y=|f(x)|$ можно построить параболу, часть графика, лежащую выше оси OX сохранить, а часть лежащую ниже оси OX отобразить над осью OX.

Найдём вершину параболы $x_0; y_0$ $x_0=\frac{-b}{2a}$. $x_0=\frac{4}{2}=2$

$y_0=2^2-8+3=-1$ $(2;-1)$ – вершина

$OY: 0^2-4\cdot0+3=3$ $(0;3)$

$OX: x^2-4x+3=0$

$D=16-12=4$

$x_1=\frac{4+2}{2}=3$ $x_2=\frac{4-2}{2}=1$ $(3;0);(1;0)$

$y(5)=5^2-5\cdot4+3=25-20+3=8$ $(5;8)$

# Решение ученика

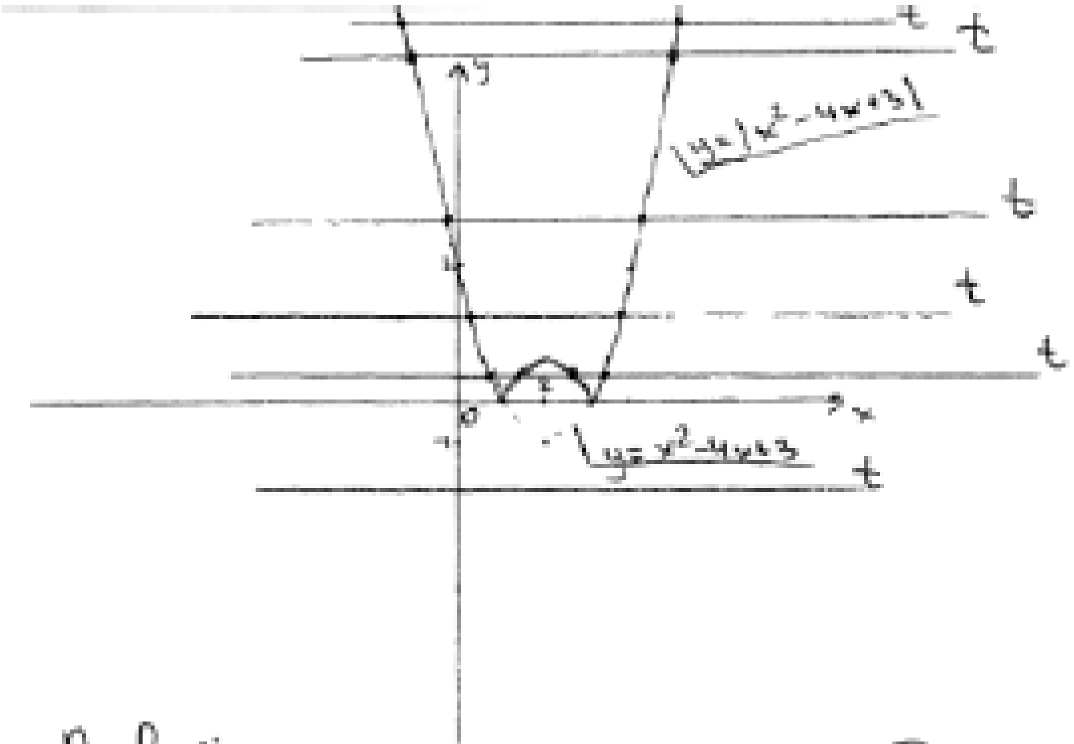
**№ 22 с 2021 года**

**23** Постройте график функции

$$y = |x^2 - 4x + 3|.$$

Какое наибольшее число общих точек график данной функции может иметь с прямой, параллельной оси абсцисс?

**Ответ:** 4.




Проведём прямые, параллельные оси абсцисс. Назовём их прямая t и отметим её точки пересечения с графиком $y=|x^2-4x+3|$

Ответ: 4 общих точки

**? баллов**

# Решение ученика

№23

Решение

Построим график функции $y=|x^2-4x+3|$ Графиком является парабола, $a=1$ ↑ (ветви направлены вверх)

Чтобы построить график функции $y=|f(x)|$ можно построить параболу, часть графика, лежащую выше оси OX сохранить, а часть лежащую ниже оси OX отобразить над осью OX.

Найдём вершину параболы $x_0; y_0$ $x_0=\frac{-b}{2a}$. $x_0=\frac{4}{2}=2$

$y_0=2^2-8+3=-1$ $(2;-1)$ – вершина

$OY: 0^2-4\cdot0+3=3$ $(0;3)$

$OX: x^2-4x+3=0$

$D=16-12=4$

$x_1=\frac{4+2}{2}=3$ $x_2=\frac{4-2}{2}=1$ $(3;0);(1;0)$

$y(5)=5^2-5\cdot4+3=25-20+3=8$ $(5;8)$

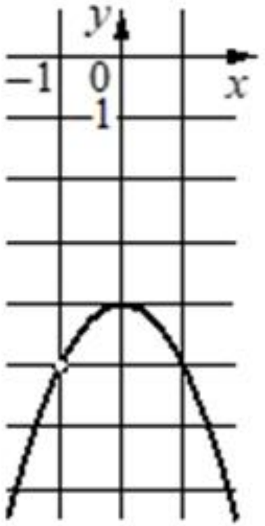
**0 баллов**

# Задание № 22

Постройте график функции $y=\dfrac{(x^2+4)(x+1)}{-1-x}$ и определите, при каких значениях $k$ прямая $y=kx$ имеет с графиком ровно одну общую точку.

**Решение.**

Преобразуем выражение: $\dfrac{(x^2+4)(x+1)}{-1-x}=-x^2-4$ при условии, что $x\neq-1$. Построим график (см. рисунок).




Прямая $y=kx$ имеет с графиком ровно одну общую точку, если она проходит через точку $(-1;-5)$ или если уравнение $-x^2-4=kx$ имеет один корень. Дискриминант уравнения $x^2+kx+4=0$ равен $k^2-16$, и он должен быть равен нулю. Получаем, что $k=5$, $k=-4$ и $k=4$.

**Ответ:** $k=5$, $k=-4$, $k=4$.

---

**В критериях - план решения для эксперта**

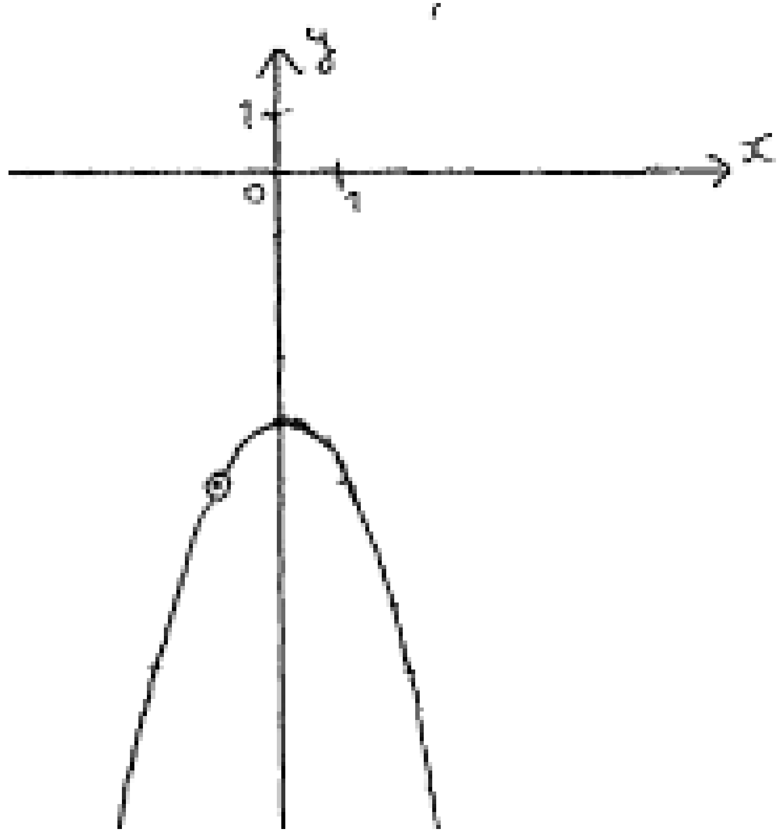
## Решение ученика

# Задание № 22

23. $y = \frac{(x^2+4)(x+1)}{-1-x} = -\frac{(x^2+4)(x+1)}{(x+1)}$

$\begin{cases} y = -x^2 - 4 \\ x \neq -1 \end{cases}$

при $k = 5$, прямая $y = kx$ имеет с графиком ровно одну общую точку




**0 баллов**

**Решение ученика**

**Задание № 22**

23) $y = \frac{(x^2+4)(x+1)}{-1-x}$ ; ОДЗ: $x \neq -1$

$\frac{(x^2+4)(x+1)}{-1-x} = \frac{(x^2+4)(x+1)}{-1(x+1)} = -x^2-4$

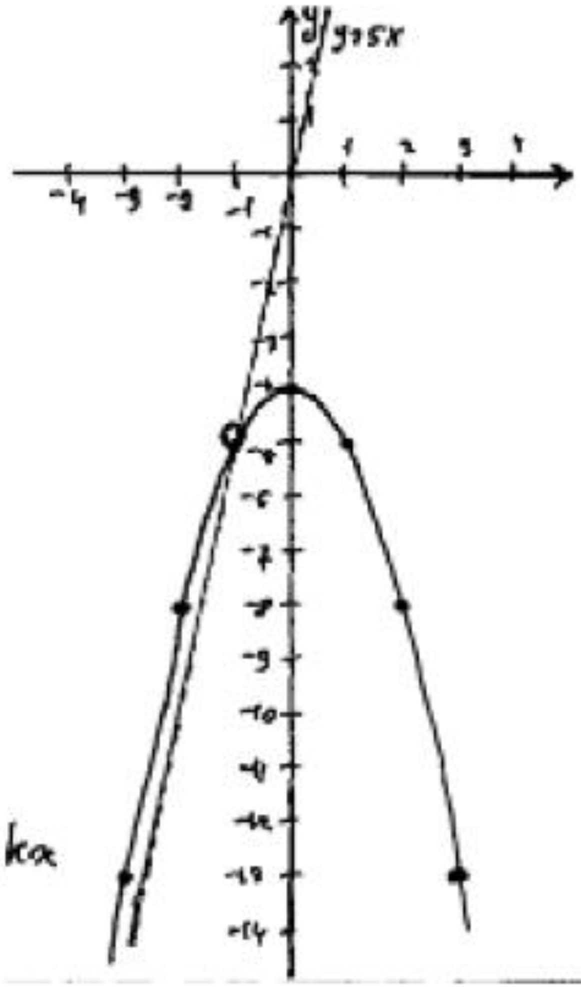
$y = -x^2-4$ – функция квадратичная,

график парабола

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $x$ | $-2$ | $-1$ | $0$ | $1$ | $2$ |
| $y$ | $-8$ | $-5$ | $-4$ | $-5$ | $-8$ |

График ф-ции $y = \frac{(x^2+4)(x+1)}{-1-x}$ имеет с графиком ф-ции $y = kx$

одну общую точку при $k = 5$




**1 балл**

# Задание № 23

| Баллы | Критерии оценки выполнения задания |
|---|---|
| 2 | Ход решения верный, все его шаги выполнены правильно, получен верный ответ |
| 1 | Ход решения верный, все его шаги выполнены правильно, но даны неполные объяснения или допущена одна вычислительная ошибка |
| 0 | Другие случаи, не соответствующие указанным критериям |
| 2 | *Максимальный балл* |

# Задание № 23

Окружность с центром на стороне $AC$ треугольника $ABC$ проходит через вершину $C$ и касается прямой $AB$ в точке $B$. Найдите $AC$, если $AB = 8$, диаметр окружности равен 3,6.

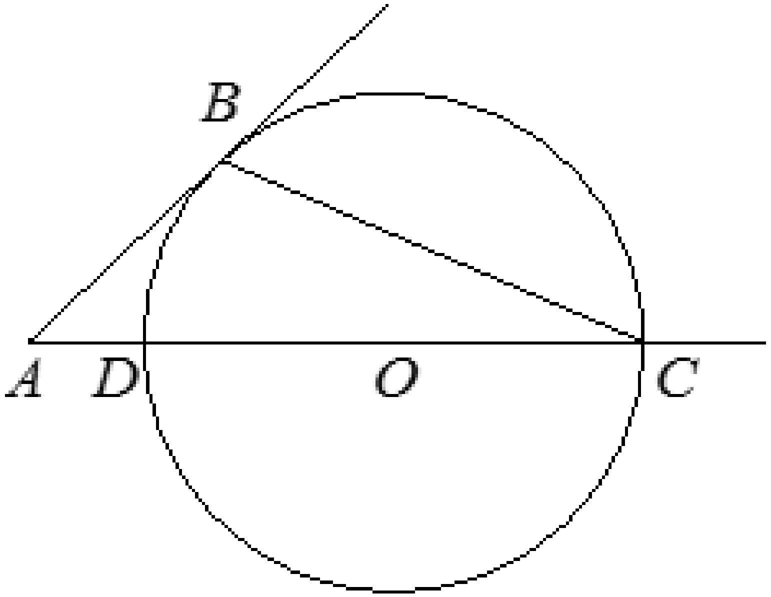
**Решение.**

Пусть $AC = x$. Тогда по свойству касательной и секущей, проведённых из одной точки к окружности, получаем:

$AB^2 = AC(AC - CD)$; $64 = x(x - 3{,}6)$, откуда

$x = 10$.

**Ответ:** 10.




**В критериях - план решения для эксперта**

## № 23

Окружность с центром на стороне $AC$ треугольника $ABC$ проходит через вершину $C$ и касается прямой $AB$ в точке $B$. Найдите $AC$, если $AB = 8$, диаметр окружности равен 3,6.

**Решение.**

Прямая $AB$ касается окружности, следовательно, радиус $OB$, равный 1,8, перпендикулярен $AB$.

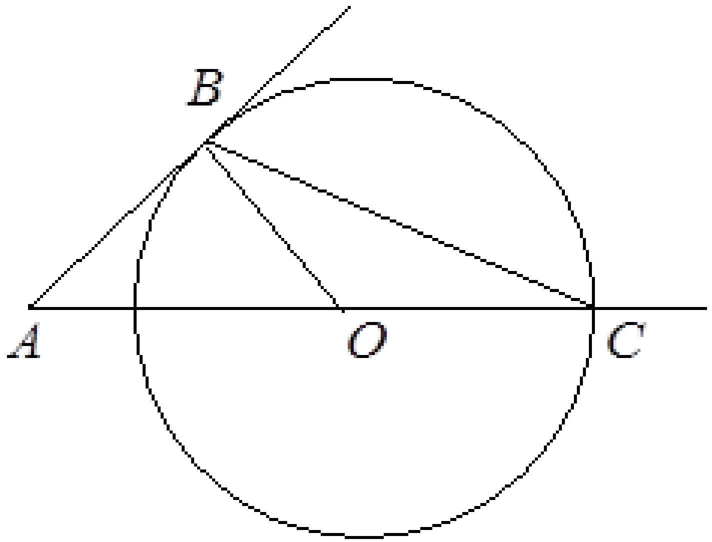
Треугольник $AOB$ прямоугольный. По теореме Пифагора:

$AO^2 = AB^2 + OB^2$; $AO^2 = 8^2 + 1{,}8^2$;

$AO^2 = 67{,}24$; $AO = 8{,}2$.

$AC = AO + OC$, где $OC$ – радиус, тогда

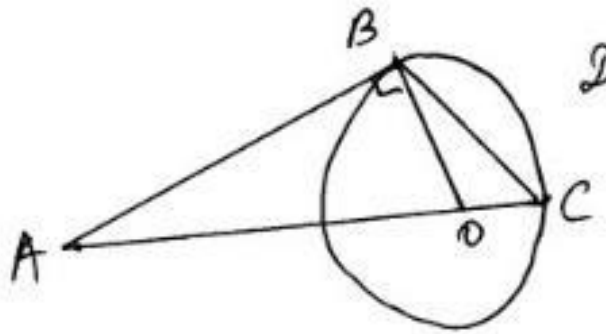
$AC = 8{,}2 + 1{,}8 = 10$.




**Ответ:** 10.

# Задание № 23

## Решение ученика




№ 24.

Дано: O – центр окружности !!!

$AB = 8$

$2BO = 3,6$.

Найти: $AC$.

Решение:

$BO = \frac{3,6}{2} = 1,8$

$AO = \sqrt{64 + 3,24} = \sqrt{8^2 + 1,8^2} = \sqrt{67,24} = 8,2$.

$AC = AO + OC = 8,2 + 1,8 = 10$

Ответ: 10.

**0 баллов**

# Задание № 23

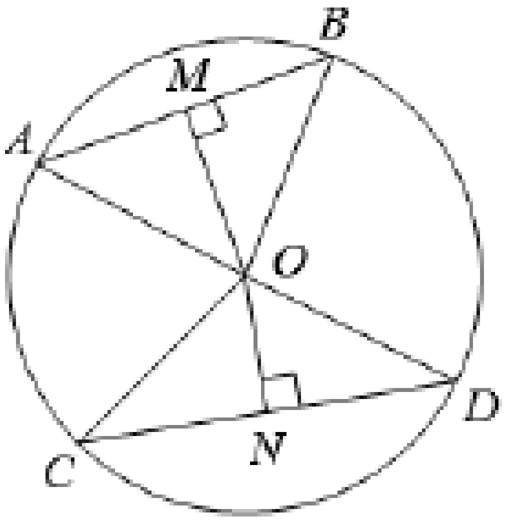
**24** Отрезки $AB$ и $CD$ являются хордами окружности. Найдите расстояние от центра окружности до хорды $CD$, если $AB = 14$, $CD = 48$ а расстояние от центра окружности до хорд $AB$ равно 24.

**Решение.**

Пусть $OM$ и $ON$ — перпендикуляры к хордам $AB$ и $CD$ соответственно. Треугольники $AOB$ и $COD$ равнобедренные, значит, $AM = MB$ и $CN = ND$.

Тогда в прямоугольном треугольнике $MOB$ имеем:

$$OB = \sqrt{OM^2 + \left(\frac{AB}{2}\right)^2} = 25.$$




В прямоугольном треугольнике $CON$ гипотенуза

$CO = OB = 25$, откуда $ON = \sqrt{OC^2 - \left(\frac{CD}{2}\right)^2} = 7$.

Получаем, что расстояние от центра окружности до хорд $CD$ равно 7.

Ответ: 7.

**В критериях - план решения для эксперта**

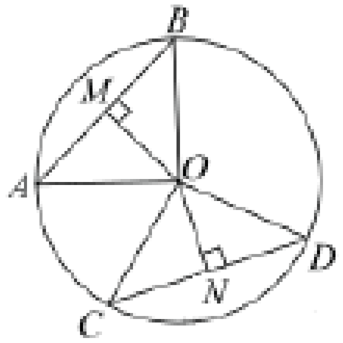
# Задание № 23

Отрезки $AB$ и $CD$ являются хордами окружности. Найдите расстояние от центра окружности до хорды $CD$, если $AB = 14$, $CD = 48$, а расстояние от центра окружности до хорды $AB$ равно 24.

**Решение.**

Рассмотрим треугольники $AOM$ и $BOM$, они прямоугольные, стороны $AO$ и $BO$ равны как радиусы окружностей, $OM$ — общая, следовательно, треугольники $AOM$ и $BOM$ равны, откуда

$$AM = BM = \frac{AB}{2} = 7.$$




Аналогично равны треугольники $CON$ и $DON$, откуда

$$CN = ND = \frac{CD}{2} = 24.$$

Рассмотрим треугольник $MOB$, найдем $OB$ по теореме Пифагора.

$$OB = \sqrt{OM^2 + MB^2} = 25.$$

Рассмотрим треугольник $OND$, он прямоугольный.

По теореме Пифагора найдем $ON$.

$$ON = \sqrt{OD^2 - ND^2} = 7.$$

Таким образом, расстояние от центра окружности до хорды $CD$ равно 7.

# Задание № 23

## Решение ученика

№24

Дано:

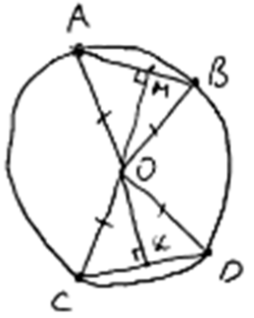
AO - ос-ть

AB = 14

CD = 48

MO = 24

Найти: OK



Решение: Доп построй: R - AO ; CO . OB ; OD .

если AO = BO (как радиусы), то ∠A = ∠B ; OM - расстояние, значит высота => △ AOM и △ BOM - прямоуг. => △AOM = △BOM по гип и углу =>

=> ~~AO~~ AM = MB = $\frac{1}{2}$ AB = 7

$a^2 + b^2 = c^2$ (Пиф)

$AO^2 = AM^2 + MO^2$ ?

$AO = \sqrt{24^2 + 7^2} = \sqrt{625} = 25$

△ COK = △ DOK (аналогич. △AMO и △ BMO) =>

CK = KD = $\frac{1}{2}$ CD = 24

$OC^2 = OK^2 + CK^2$ ?

$OK^2 = CO^2 - CK^2$ $\quad$ $OK = \sqrt{25^2 - 24^2} = \sqrt{49} = 7$

Ответ: 7

**1 балл**

# Задание № 23

## Решение ученика

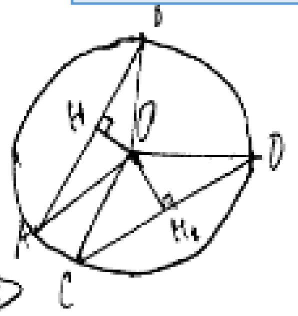
**1 балл**

№24

Дано: $OH=24$
окружность с центром в $O$, $AB=14$, $CD=48$
$AB$ и $CD$ - хорды
$OH$ и $OH_1$ - высоты

Найти $CH_1$ - ?

Решение:




1) Рассм. $\Delta ABO$
$OB=OA$ (радиусы) $\Rightarrow$
$\Delta ABO$ - равнобедр. $\Rightarrow$
$OH$ - медиана $\Rightarrow AH=BH=0,5AB=7$

2) Рассм $\Delta COD$
$OC=OD$ (радиусы) $\Rightarrow \Delta COD$ - равнобедренный $\Rightarrow OH_1$ - медиана $\Rightarrow CH_1=DH_1=$
$=0,5CD=24$

3) По Th Пифагора $OH^2+HB^2=OB^2 \Rightarrow$
$OB=\sqrt{OH^2+HB^2}=25$

4) $OB=OD$ (радиусы)

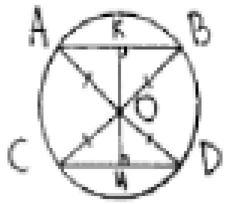
5) По Th Пифагора $OH_1^2+H_1D^2=$
$=OD^2 \Rightarrow \cancel{OD=\sqrt{OH_1^2+H_1D^2}}$ $OH_1=\sqrt{OD^2-H_1D^2}=$
$=\sqrt{25^2-24^2}=7$

Ответ: 7

## Решение ученика

## Задание № 23

24




Дано: окр; $AB$ и $CD$ - хорды; $AB=14$, $CD=48$, $OK=24$

Найти: $OH$.

Решение:

$\triangle AOB$: Проведем $OK \perp AB$; $OK=24$.

$\triangle AOB$ - равнобедренный, т.к. $AO=OB=R$ (радиус) $\Rightarrow$ $OK$ - высота, медиана, биссектриса; $AK=KB=14:2=7$.

$OB^2=7^2+24^2$

$OB^2=49+576$

$OB^2=625$

$OB=25$

Т.к. $AO=OB=CO=OD$, то $AO=OB=CO=OD=25$.

$\triangle COD$. Проведем $OH \perp CD$.

$\triangle COD$ - равнобедренный, т.к. $CO=OD=R$ (радиус) $\Rightarrow$ $OH$ - высота, медиана, биссектриса; $CH=HD=48:2=24$.

$OH^2=25^2-24^2$

$OH^2=625-576$

$OH^2=49$

$OH=7$

Ответ: 7.

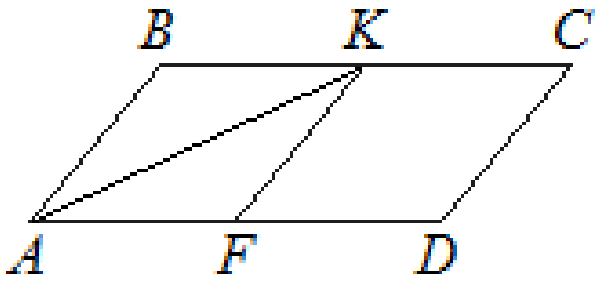
**1 балл**

## Задание № 23

Сторона $BC$ параллелограмма $ABCD$ вдвое больше стороны $AB$. Точка $K$ — середина стороны $BC$. Докажите, что $AK$ — биссектриса угла $BAD$.

**Доказательство.**

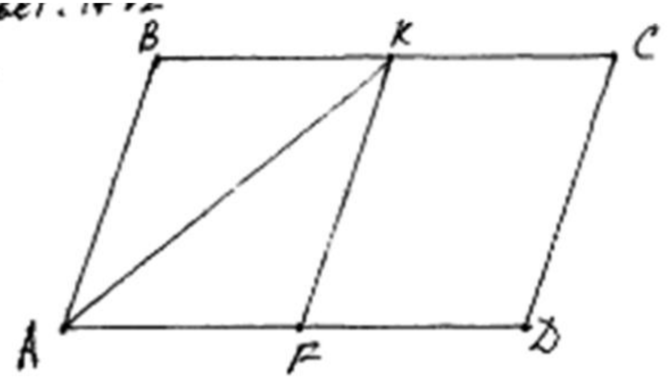
Проведём прямую $KF$ параллельно стороне $AB$ (см. рисунок). Поскольку $BK = KC = AB$, параллелограмм $ABKF$ является ромбом, поэтому диагональ $AK$ ромба $ABKF$ делит угол $BAF$ пополам. Значит, $AK$ — биссектриса угла $BAD$.




**В критериях - план решения для эксперта**

# Решение ученика

# Задание № 23




Дано: ABCD – параллелограмм

$BC = 2AB$; $BK = KC$;

Доказать: AK – биссектриса $\angle BAD$

Доказательство:

Проведем отрезок KF парралельный AB

Поскольку $BK = KC = AB$ параллелограмм ABKF явл. ромбом

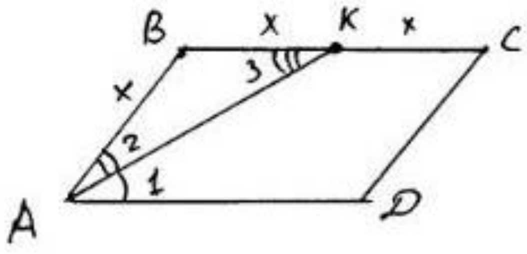
Поэтому диагональ ромба ABKF делит угол BAF пополам

Значит AK является биссектрисой угла BAD

**0 баллов**

Решение ученика

# Задание № 24




№25

Дано: $BC = 2AB$

$ABCD$ - параллелограмм.

$K$ - середина $BC$

Док-ть: $AK$ - биссектриса ∠

$\angle BAD$

Док-во:

$BK \parallel AD \Rightarrow AK$ - секущая $\Rightarrow \angle 1 = \angle 3$.

$AB = BK \Rightarrow \triangle ABK$ - равнобедренный $\Rightarrow$

$\angle 2 = \angle 3 \Rightarrow \angle 1 = \angle 2 \Rightarrow AK$ - биссектриса угла $BAD$. Ч.Т.Д.

**1 балл**

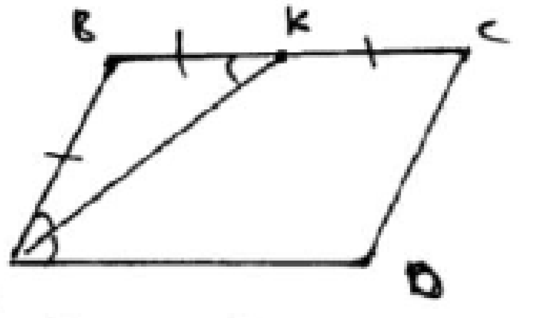
# Решение ученика

# Задание № 23

Дано: ABCD – паралелогр.

$BC = 2AB$

$BK = KC$




$BK = \frac{1}{2} BC = AB$ по усл.

$\triangle ABK$ – равнобед.

$\angle BAK = \angle BKA$ по опр. рав. тр.

$\angle BKA = \angle KAD$ как внутр. накрест. леж.

$\Downarrow$

$\angle BAK = \angle KAD$

$\Downarrow$

$AK$ – биссектриса

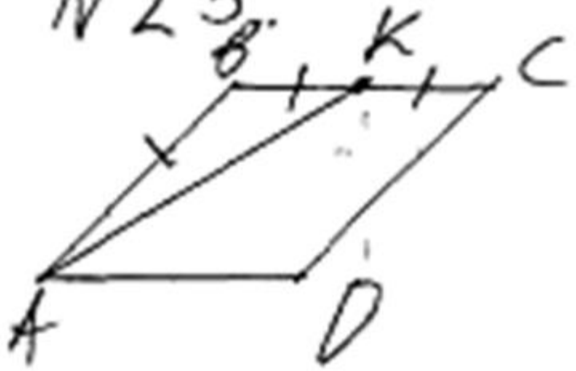
Ч.Т.Д.

**0 балл**

Решение ученика

# Задание № 23

N 25.




Дано: $ABCD$ – парал-м; $2AB = BC$,
$K$ – сер $BC$.

Доказать: $AK$ – бис.

Доказательств:

$AB = BK = KC$, т.к. $AB = BK$, то $\angle BAK = \angle BKA$ ($\triangle ABK$ – р/б)

т.к $BC \parallel AD$ (т.к. $ABCD$ – парал-м), то $\angle BKA = \angle KAD$ – накрест. леж.

т.к. $\angle BKA = \angle BAK$ и $\angle BKA = \angle KAD \Rightarrow \angle BAK = \angle KAD \Rightarrow$
$\Rightarrow AK$ – бис.

**0 баллов**