Банковская задача ЕГЭ (№17) на диагностическом профильном экзамене по математике: задание, решение, оформление, ошибки и объяснения

№	Проверяемые требования (умения)
17	Уметь использовать приобретенные знания и умения в практической деятельности и повседневной жизни

Основные ошибки, допущенные участниками:

- невнимательное чтение и неверное понимание условия задачи;
- неверное составление модели;
- вычислительные (арифметические) ошибки;
- прекращение решения на промежуточном шаге, то есть без доведения ответа до числового значения;
- решение методом перебора без обоснования единственности;
- использование в решении без вывода формул, отсутствующих в учебниках (решение имеет вид «формула – ответ»), что можно трактовать как отсутствие построения модели задачи.

Задание

В июле 2020 года планируется взять кредит в банке на некоторую сумму. Условия его возврата таковы:

— каждый январь долг увеличивается на $r\%$ по сравнению с концом предыдущего года;

— с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить одним платежом часть долга.

Если ежегодно выплачивать по 75 000 рублей, то кредит будет полностью погашен за 4 года, а если ежегодно выплачивать по 123 000 рублей, то кредит будет полностью погашен за 2 года. Найдите r.

Решение.

Пусть сумма кредита составляет S рублей, а ежегодные выплаты X рублей, $k = 1 + \frac{r}{100}$. По условию, долг перед банком (в рублях) по состоянию на июль должен уменьшаться следующим образом:

$$S,\ kS - X,\ k^2 S - kX - X,\ k^3 S - k^2 X - kX - X,\ k^4 S - k^3 X - k^2 X - kX - X.$$

Таким образом, если долг будет выплачен двумя равными платежами X_2, то

$$X_2 = \frac{k^2 \cdot (k-1)}{k^2 - 1} \cdot S = 123\,000.$$

Если долг будет выплачен четырьмя равными платежами X_4, то

$$X_4 = \frac{k^4 \cdot (k-1)}{k^4 - 1} \cdot S = 75\,000.$$

Таким образом, $\frac{X_4}{X_2} = \frac{k^2}{k^2+1} = \frac{75\,000}{123\,000} = \frac{25}{41}$, откуда $k^2 = \frac{25}{16}$; $k = \frac{5}{4}$. Значит, $r = 25$.

Ответ: 25.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	3
Верно построена математическая модель, решение сведено к исследованию этой модели и получен результат: — неверный ответ из-за вычислительной ошибки; — верный ответ, но решение недостаточно обосновано	2
Верно построена математическая модель, решение сведено к исследованию этой модели, при этом решение может быть не завершено	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

1)

Дано:
S - сумма кредита
r - % банка
x - 75000 выплата ежегод. за 4 года
y - 123000 выплата ежегод. за 2 года

r - ?

Решение. 1) $m = 1 + \frac{r}{100}$;

2) Если кредит выплачивать 4 года:

1: $Sm - x$; 2: $Sm^2 - xm - x$; 3: $Sm^3 - xm^2 - xm - x$;

4: $Sm^4 - xm^3 - xm^2 - xm - x = 0$;

3) Если за 2 года:

1: $Sm - y$; 2: $Sm^2 - ym - y = 0$;

4) Выразим сумму кредита:

$$S = \frac{xm^3 + xm^2 + xm + x}{m^4}; \quad S = \frac{y + ym}{m^2};$$

$$\frac{xm^3 + xm^2 + xm + x}{m^4} = \frac{y + ym}{m^2} \quad \Big| \cdot m^4$$

$$xm^3 + xm^2 + xm + x = ym^2 + ym^3;$$

$$75000m^3 + 75000m^2 + 75000m + 75000 = 123000m^2 + 123000m^3 \quad \Big| : 1000$$

$$75m^3 + 75m^2 + 75m + 75 = 123m^2 + 123m^3;$$

$$48m^3 + 48m^2 - 75m - 75 = 0;$$

$(48m^2 - 75)(m + 1) = 0$; (m не может быть < 0, поэтому рассмотрим $48m^2 - 75 = 0$)

$$48m^2 - 75 = 0; \rightarrow m^2 = \frac{75}{48} \rightarrow m^2 = \frac{25}{16} \Rightarrow m = \frac{5}{4};$$

5) Т.к. $m = 1 + \frac{r}{100}$, то $\frac{5}{4} = 1 + \frac{r}{100}$; $\rightarrow \frac{1}{4} = \frac{r}{100} \rightarrow r = 25\%$

Ответ: 25%

1)

Дано:
S - сумма кредита
r - % банка
x - 75000 ежегод. выплата за 4 года
y - 123000 ежегод. выплата за 2 года

r - ?

Решение. 1) $m = 1 + \frac{r}{100}$;

2) Если кредит выплачивать 4 года:

$1: Sm - x$; $2: Sm^2 - xm - x$; $3: Sm^3 - xm^2 - xm - x$;

$4:$ ~~[illegible]~~ $Sm^4 - xm^3 - xm^2 - xm - x = 0$;

3) Если за 2 года:

$1: Sm - y$; $2: Sm^2 - ym - y = 0$;

4) Выразим сумму кредита:

$$S = \frac{xm^3 + xm^2 + xm + x}{m^4}; \quad S = \frac{y + ym}{m^2};$$

$$\frac{xm^3 + xm^2 + xm + x}{m^4} = \frac{y + ym}{m^2} \quad \Big| \cdot m^4$$

$$xm^3 + xm^2 + xm + x = ym^2 + ym^3;$$

$$75000m^3 + 75000m^2 + 75000m + 75000 = 123000m^2 + 123000m^3 \quad \Big| : 1000$$

$$75m^3 + 75m^2 + 75m + 75 = 123m^2 + 123m^3;$$

$$48m^3 + 48m^2 - 75m - 75 = 0;$$

$(48m^2 - 75)(m+1) = 0$; (m не может быть < 0, поэтому рассмотрим $48m^2 - 75 = 0$)

$$48m^2 - 75 = 0; \rightarrow m^2 = \frac{75}{48} \rightarrow m^2 = \frac{25}{16} \Rightarrow m = \frac{5}{4};$$

5) Т.к. $m = 1 + \frac{r}{100}$, то $\frac{5}{4} = 1 + \frac{r}{100}$; $\rightarrow \frac{1}{4} = \frac{r}{100} \rightarrow r = 25\%$

Ответ: 25%

2)

Сумма кредита взятая изначально — S.

Если выплачивать по 75 тысяч, то

1 год: $S(1+\frac{r}{100})-75$ 2 год: $S(1+\frac{r}{100})^2-75(1+\frac{r}{100})-75$

3 год: $S(1+\frac{r}{100})^3-75(1+\frac{r}{100})^2-75(1+\frac{r}{100})-75$

4 год: $S(1+\frac{r}{100})^4-75(1+\frac{r}{100})^3-75(1+\frac{r}{100})^2-75(1+\frac{r}{100})-75=0$

Если выплачивать по 123 тысячи, то

1 год: $S(1+\frac{r}{100})-123$

2 год: $S(1+\frac{r}{100})-123(1+\frac{r}{100})-123=0$

Выполним замену: $1+\frac{r}{100}=x$

$$\begin{cases} Sx^4-75(x^3+x^2+x+1)=0 \\ Sx^2-123(x+1)=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} Sx^4-75(x^2+1)(x+1)=0 \\ S=\frac{123(x+1)}{x^2} \end{cases}$$

$$123\cancel{(x+1)}x^2-75(x^2+1)\cancel{(x+1)}=0$$

$$123x^2-75x^2-75=0$$

$$48x^2=75$$

$$x^2=\frac{25}{16}$$

$$x=\pm\cancel{\frac{25}{16}}\ \frac{5}{4}$$

x не может быть отрицательным.

$1+\frac{r}{100}=\frac{5}{4}$ $r=25$ Ответ: $r=25\%$.

2)

Сумма кредита взятая изначально – S.

Если выплачивать по 75 тысяч, то

1 год: $S(1+\frac{r}{100})-75$ 2 год: $S(1+\frac{r}{100})^2-75(1+\frac{r}{100})-75$

3 год: $S(1+\frac{r}{100})^3-75(1+\frac{r}{100})^2-75(1+\frac{r}{100})-75$

4 год: $S(1+\frac{r}{100})^4-75(1+\frac{r}{100})^3-75(1+\frac{r}{100})^2-75(1+\frac{r}{100})-75=0$

Если выплачивать по 123 тысячи, то

1 год: $S(1+\frac{r}{100})-123$

2 год: $S(1+\frac{r}{100})^2-123(1+\frac{r}{100})-123=0$

Выполним замену: $1+\frac{r}{100}=x$

$$\begin{cases} Sx^4-75(x^3+x^2+x+1)=0 \\ Sx^2-123(x+1)=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} Sx^4-75(x^2+1)(x+1)=0 \\ S=\frac{123(x+1)}{x^2} \end{cases}$$

$$123\cancel{(x+1)}x^2-75(x^2+1)\cancel{(x+1)}=0$$

$$123x^2-75x^2-75=0$$

$$48x^2=75$$

$$x^2=\frac{25}{16}$$

$$x=\pm\cancel{\frac{25}{16}}\ \frac{5}{4}$$

x не может быть отрицательным.

$1+\frac{r}{100}=\frac{5}{4}$ $r=25$ Ответ: $r=25\%$.

3)

S - сумма кредита; $\frac{r}{100}$ - процент увеличения; $t = 1 + \frac{r}{100}$ - увеличение суммы долга на данный процент; $t > 0$

Выплата I = 75 тыс. р. ; выплата II = 123 тыс. р.

Система выплат - аннуитетная;

I вариант выплат

месяц	Долг	Долг после начисления r%	Выплата (тыс. р.)	Долг после выплаты
1	S	St	75	$St - 75$.
2	$St - 75$	$St^2 - 75t$	75	$St^2 - 75t - 75$.
3	$St^2 - 75t - 75$	$St^3 - 75t^2 - 75t$	75	$St^3 - 75t^2 - 75t - 75$
4.	$St^3 - 75t^2 - 75t - 75$	$St^4 - 75t^3 - 75t^2 - 75t$	75	0

Значит, $St^4 - 75t^3 - 75t^2 - 75t - 75 = 0$

II вариант выплат

месяц	Долг	Долг после начисления r%	Выплата (тыс. р.)	Долг после выплаты
1.	S	St	123	$St - 123$
2.	$St - 123$	$St^2 - 123t$	123	0

Значит, $St^2 - 123t - 123 = 0$

Имеем систему уравнений:

$$\begin{cases} St^4 - 75t^3 - 75t^2 - 75t - 75 = 0 \\ St^2 - 123t - 123 = 0 \end{cases}$$

Из II уравнения системы выразим S сумму долга

3)

$S = \frac{123t + 123}{t^2} = \frac{123(t+1)}{t^2}$

Подставим выраженную переменную S во I уравнение системы

$\frac{123(t+1)}{t^2} \cdot t^4 - 75t^3 - 75t^2 - 75t - 75 = 0$

$123t^2(t+1) - 75t^3 - 75t^2 - 75t - 75 = 0$

$123t^3 + 123t^2 - 75t^3 - 75t^2 - 75t - 75 = 0$

$48t^3 + 48t^2 - 75t - 75 = 0$

$48t^2(t+1) - 75(t+1) = 0$

$(48t^2 - 75)(t+1) = 0$

$48t^2 - 75 = 0$

$t^2 = \frac{75}{48}$

$t^2 = \frac{25}{16}$

$t_1 = -\frac{5}{4}$ не удовлетворяет условию на t $(t>0)$

$t_2 = \frac{5}{4}.$

$t + 1 = 0$

$t = -1$ не удовлетворяет условию на t $(t > 0)$

Обратная замена

$1 + \frac{n}{100} = \frac{5}{4}.$

$\frac{n}{100} = 0,25$

$n = 25\ \%$

Ответ: 25 %.

3)

$$S = \frac{123t+123}{t^2} = \frac{123(t+1)}{t^2}$$

Подставим выраженную переменную S ~~во~~ I уравнение системы

$$\frac{123(t+1)}{t^2} \cdot t^4 - 75t^3 - 75t^2 - 75t - 75 = 0$$

$$123t^2(t+1) - 75t^3 - 75t^2 - 75t - 75 = 0$$

$$123t^3 + 123t^2 - 75t^3 - 75t^2 - 75t - 75 = 0$$

$$48t^3 + 48t^2 - 75t - 75 = 0$$

$$48t^2(t+1) - 75(t+1) = 0$$

$$(48t^2 - 75)(t+1) = 0$$

$$48t^2 - 75 = 0 \qquad\qquad t+1=0$$

$$t^2 = \frac{75}{48} \qquad\qquad t=-1$$

не удовлетворяет условию на t $(t>0)$

$$t^2 = \frac{25}{16}$$

$$t_1 = -\frac{5}{4} \qquad t_2 = \frac{5}{4}.$$

не удовлетворяет условию на t $(t>0)$

Обратная замена

$$1 + \frac{n}{100} = \frac{5}{4}.$$

$$\frac{n}{100} = 0{,}25$$

$$n = 25\ \%$$

Ответ: 25 %.

4)

1) Если выплачивать по 75 000 но за 4 года = 75000 · 4 = 300 000

2) Если выплачивать по 123 000 но за 2 года = 123 000 · 2 = 246 000

Найдём на сколько ~~увеличился~~ увеличился бы кредит в первом случае, если пройдет ещё 2 года

$$\begin{array}{r} -\,300\,000 \\ 246\,000 \\ \hline 54\,000 \end{array}$$

– кредит увеличися за 2 года. => 27 000 кредит увелися за 1 год.

Найдем r %

$$\begin{array}{r|l} 246\,000 & 27000 \\ \hline -\,243\,000 & 9,1 \\ 30000 & \\ -\,27000 & \\ \hline 3000 & \end{array}$$

Ответ: r = 9,1

4)

1) Если выплачивать по 75 000 но за 4 года = 75000 · 4 = 300 000

2) Если выплачивать по 123 000 но за 2 года = 123 000 · 2 = 246 000

Найдём на сколько ~~увеличився~~ увеличился бы кредит в первом случае, если пройдет ещё 2 года

$$\begin{array}{r} 300\,000 \\ -\ 246\,000 \\ \hline 54\,000 \end{array}$$

– кредит увеличился за 2 года. => 27 000 кредит увеличился за 1 год. Найдем r %

$$\begin{array}{r|l} 246\,000 & 27000 \\ \hline -\ 243\,000 & 9,1 \\ 30000 & \\ -\ 27000 & \\ \hline 3000 & \end{array}$$

Ответ: r = 9,1

5)

1 год – 75.000 р – 4 года

1 год – 123.000 р – 2 года

$$\begin{array}{r} +\,123.000 \\ 123.000 \\ \hline 246.000 \end{array} \qquad \begin{array}{r} \times\,75.000 \\ 4 \\ \hline 300000 \end{array}$$

$123.000 \cdot 2 = 246.000$

$75.000 \cdot 4 = 300.000$

$300.000 - 246.000 = 54.000$

$54.000 - 100\%$

$27.000 - x$

(54.0)

$$\frac{\cancel{27.000}^{1} \cdot 100}{\cancel{54.000}_{2}} = \frac{100}{2} = 50\%$$

Ответ: 50%

5)

1 год – 75.000 р – 4 года

1 год – 123.000 р – 2 года

$$\begin{array}{r} + \begin{array}{r}123.000\\123.000\end{array}\\ \hline 246.000\end{array} \qquad \begin{array}{r} \times \begin{array}{r}75.000\\4\end{array}\\ \hline 300000\end{array}$$

$123.000 \cdot 2 = 246.000$

$75.000 \cdot 4 = 300.000$

$300.000 - 246.000 = 54.000$

54.000 – 100%

27.000 – x

(54.0)

$$\frac{\cancel{27.000}^{1} \cdot 100}{\cancel{54.000}_{2}} = \frac{100}{2} = 50\%$$

Ответ: 50%

б)

(фрагмент решения)

$$\begin{cases}(((x(1+r)-75000)(1+r)-75000)(1+r)-75000)(1+r)-75000=0\\ x=\dfrac{123000(r+2)}{(r+1)^2}\end{cases}$$

$$\left(\left(\left(\frac{123000(r+2)}{(r+1)^2}\cdot(r+1)\overset{r+1}{-75000}\right)\cdot(r+1)-75000\right)(r+1)-75000\right)(1+r)-75000=0$$

$$\left(\left(\frac{123000(r+2)-75000(r+1)}{r+1}(r+1)-75000\right)(r+1)-75000\right)(1+r)-75000=0$$

$$((123000-75000)(r+2)(r+1)-75000)(r+1)-75000=0$$

$$(48000(r+1)(r+2)-75000)(r+1)-75000=0$$

$$48000(r+1)^2(r+2)-75000(r+2)=0 \;\Big|:(r+2)>0$$ (кредит нельзя брать под отриц. кол-во процентов в данной задаче)

$$(r+1)^2\,48000-75000=0$$

$$48000r^2+2\cdot 48000r+48000-75000=0 \;\Big|:1000$$

$$48r^2+96r-27=0 \;\Big|:3$$

$$16r^2+32r-9=0$$

$$D=32^2+4\cdot 9\cdot 16=1600=40^2$$

$$r_{1,2}=\frac{-32\pm 40}{2\cdot 16}=\left[\begin{array}{l}0{,}25\\ -\frac{72}{32}\end{array}\right.$$ $-\frac{72}{32}$ – посторонний корень, т.к $r>0$

Значит, кредит был взят под $0{,}25=25\%$ годовых

Ответ: 25%

б)

(фрагмент решения)

$$\begin{cases} (((x(1+r)-75000)(1+r)-75000)(1+r)-75000)(1+r)-75000=0 \\ x=\dfrac{123000(r+2)}{(r+1)^2} \end{cases}$$

$$\left(\left(\left(\frac{123000(r+2)}{(r+1)^2}\cdot(r+1)\overset{r+1}{-75000}\right)\cdot(r+1)-75000\right)(r+1)-75000\right)(1+r)-75000=0$$

$$\left(\left(\frac{123000(r+2)-75000(r+1)}{r+1}(r+1)-75000\right)(r+1)-75000\right)(1+r)-75000=0$$

$$((123000-75000)(r+2)(r+1)-75000)(r+1)-75000=0$$

$$(48000(r+1)(r+2)-75000)(r+1)-75000=0$$

$$48000(r+1)^2(r+2)-75000(r+2)=0 \quad \Big|:(r+2)>0$$ (кредит нельзя брать под отриц. кол-во процентов в данной задаче)

$$(r+1)^2\,48000-75000=0$$

$$48000r^2+2\cdot48000r+48000-75000=0 \quad \Big|:1000$$

$$48r^2+96r-27=0 \quad \Big|:3$$

$$16r^2+32r-9=0$$

$$D=32^2+4\cdot9\cdot16=1600=40^2$$

$$r_{1,2}=\frac{-32\pm40}{2\cdot16}=\left[\begin{array}{l}0{,}25\\ -\dfrac{72}{32}\end{array}\right.$$ $-\frac{72}{32}$ – посторонний корень, т.к $r>0$

Значит, кредит был взят под $0{,}25=25\%$ годовых

Ответ: 25%

7)

I S- сумма кредита ; $r\%$; $k = 1 + 0{,}001r$;

$P = 127\ 296$; на 2 года

	Долг	Выплата	Остаток
1 год	$S \cdot k$	P	$Sk - P$
2 год	$(Sk - P)k$	P	$Sk^2 - Pk - P = 0$

II S- сумма кредита ; $r\%$; $k = 1 + 0{,}001r$; $A = 69\ 696$

	Долг	Выплата	Остаток
1 год	$S \cdot k$	A	$Sk - A$
2 год	$(Sk - A)k$	A	$Sk^2 - Ak - A$
3 год	$(Sk^2 - Ak - A)k$	A	$Sk^3 - Ak^2 - Ak - A$
4 год	$(Sk^3 - Ak^2 - Ak - A)k$	A	$Sk^4 - Ak^3 - Ak^2 - Ak - A = 0$

Выразим S

$$S = \frac{Pk + P}{k^2}$$

приравниваем т.к S- сумма кредита, неизменна

$$S = \frac{Ak^3 + Ak^2 + Ak + A}{k^4}$$

$$\frac{Pk + P}{k^2} = \frac{Ak^3 + Ak^2 + Ak + A}{k^4}$$

$$\frac{Pk + P}{k^2}^{\backslash k^2} - \frac{Ak^3 - Ak^2 - Ak - A}{k^4} = 0$$

$$\frac{Pk^3 + Pk^2 - Ak^3 - Ak^2 - Ak - A}{k^4} = 0$$

7)

I S- сумма кредита ; $r\%$; $k = 1 + 0{,}01r$;

$P = 127\ 296$; на 2 года

	Долг	Выплата	Остаток
1 год	$S \cdot k$	P	$Sk - P$
2 год	$(Sk - P)k$	P	$Sk^2 - Pk - P = 0$

II S- сумма кредита ; $r\%$; $k = 1 + 0{,}01r$; $A = 69\ 696$

	Долг	Выплата	Остаток
1 год	$S \cdot k$	A	$Sk - A$
2 год	$(Sk - A)k$	A	$Sk^2 - Ak - A$
3 год	$(Sk^2 - Ak - A)k$	A	$Sk^3 - Ak^2 - Ak - A$
4 год	$(Sk^3 - Ak^2 - Ak - A)k$	A	$Sk^4 - Ak^3 - Ak^2 - Ak - A = 0$

Выразим S

$$S = \frac{Pk + P}{k^2}$$

приравниваем т.к S- сумма кредита, неизменна

$$S = \frac{Ak^3 + Ak^2 + Ak + A}{k^4}$$

$$\frac{Pk + P}{k^2} = \frac{Ak^3 + Ak^2 + Ak + A}{k^4}$$

$$\frac{Pk + P}{k^2}^{\backslash k^2} - \frac{Ak^3 - Ak^2 - Ak - A}{k^4} = 0$$

$$\frac{Pk^3 + Pk^2 - Ak^3 - Ak^2 - Ak - A}{k^4} = 0$$

8)

S – сумма долга

r – процент банка, $K = 1 + \frac{r}{100}$

I вариант выплаты долга

1 год $\quad S \longrightarrow SK \longrightarrow SK - 138125$

2 год $\quad SK - 138125 \longrightarrow (SK-138125)K \longrightarrow SK^2 - 138125K - 138125$

$$SK^2 - 138125K - 138125 = 0$$

$$S = \frac{138125(K+1)}{K^2}$$

II вариант выплаты долга

1 год $\quad S \longrightarrow SK \longrightarrow SK - 75625$

2 год $\quad SK - 75625 \longrightarrow SK^2 - 75625K \longrightarrow SK^2 - 75625K - 75625$

3 год $\quad SK^2 - 75625K - 75625 \longrightarrow SK^3 - 75625K^2 - 75625K \longrightarrow SK^3 - 75625K^2 - 75625K - 75625$

4 год $\quad SK^3 - 75625(K^2+K+1) \longrightarrow SK^4 - 75625(K^3+K^2+K+1) \longrightarrow SK^4 - 75625(K^3+K^2+K+1) - 75625$

$$SK^4 = 75625(K^3+K^2+K+1)$$

$$S = \frac{75625(K^3+K^2+K+1)}{K^4}$$

$$\frac{138125(K+1)}{K^2} = \frac{75625(K^3+K^2+K+1)}{K^4}$$

$$138125(K+1)K^2 = 75625(K^2(K+1)+K+1)$$

$$138125K^2 = 75625(K^2+1)$$

$$138125K^2 - 75625K^2 = 75625$$

$$62500K^2 = 75625$$

$K = \frac{\sqrt{13}}{10}$ $\qquad r = \left(\frac{\sqrt{13}}{10} - 1\right)\cdot 100 = 10(\sqrt{13} - 10)$ $\qquad$ Ответ: $r = 10(\sqrt{13} - 10)\%$.

8)

S – сумма долга

r – процент банка, $K = 1 + \frac{r}{100}$

I вариант выплаты долга

1 год $\quad S \longrightarrow SK \longrightarrow SK - 138125$

2 год $\quad SK - 138125 \longrightarrow (SK - 138125)K \longrightarrow SK^2 - 138125K - 138125$

$$SK^2 - 138125K - 138125 = 0$$

$$S = \frac{138125(K+1)}{K^2}$$

II вариант выплаты долга

1 год $\quad S \longrightarrow SK \longrightarrow SK - 75625$

2 год $\quad SK - 75625 \longrightarrow SK^2 - 75625K \longrightarrow SK^2 - 75625K - 75625$

3 год $\quad SK^2 - 75625K - 75625 \longrightarrow SK^3 - 75625K^2 - 75625K \longrightarrow SK^3 - 75625K^2 - 75625K - 75625$

4 год $\quad SK^3 - 75625(K^2+K+1) \longrightarrow SK^4 - 75625(K^3+K^2+K+1) \longrightarrow SK^4 - 75625(K^3+K^2+K+1) - 75625$

$$SK^4 = 75625(K^3+K^2+K+1)$$

$$S = \frac{75625(K^3+K^2+K+1)}{K^4}$$

$$\frac{138125(K+1)}{K^2} = \frac{75625(K^3+K^2+K+1)}{K^4}$$

$$138125(K+1)K^2 = 75625\left(K^2(K+1) + K+1\right)$$

$$138125K^2 = 75625(K^2+1)$$

$$138125K^2 - 75625K^2 = 75625$$

$$62500K^2 = 75625$$

К должно быть 11/10

$K = \frac{\sqrt{13}}{10}$ $\qquad r = \left(\frac{\sqrt{13}}{10} - 1\right)\cdot 100 = 10(\sqrt{13} - 10)$ $\qquad$ Ответ: $r = 10(\sqrt{13} - 10)\%$.

9)

Пусть сумма кредита S ежегод. выплаты x

$$k = 1 + \frac{r}{100}$$

$$x_2 = \frac{k^2(k-1)}{k^2-1} \cdot S = 75625$$

$$k^2 S - k x_2 = 0.$$

а если $k^4 S - k^3 x_4 - k^2 x_4 - k x_4 = 0.$

$$x_4 = \frac{k^4(k-1)}{k^4-1} \cdot S = 138125$$

$$\frac{x_2}{x_4} = \frac{75625}{138125} = k^2 = 0,55 \Rightarrow k = \frac{\sqrt{55}}{10}$$

$$10\sqrt{55} = 100 + r$$

$$r = 10\sqrt{55} - 100$$

Ответ: $r = 10\sqrt{55} - 100.$

9)

Пусть сумма кредита S ежегод. выплаты x

$$k = 1 + \frac{r}{100}$$

$$x_2 = \frac{k^2(k-1)}{k^2-1} \cdot S = 75625$$

Использование формул без вывода

$$k^2 S - k x_2 = 0$$

Потеряно слагаемое (–X)

а если $k^4 S - k^3 x_4 - k^2 x_4 - k x_4 = 0.$

$$x_4 = \frac{k^4(k-1)}{k^4-1} \cdot S = 138125$$

Перепутаны числовые значения X_2 и X_4

$$\frac{x_2}{x_4} = \frac{75625}{138125} = k^2 = 0,55 \Rightarrow k = \frac{\sqrt{55}}{10}$$

Ошибка в расчетах

$$10\sqrt{55} = 100 + r$$

$$r = 10\sqrt{55} - 100$$

Ответ: $r = 10\sqrt{55} - 100.$

Олимпиадная задача ЕГЭ (№ 19) на диагностическом профильном экзамене по математике: задание, решение, оформление, ошибки и объяснения

№	**Проверяемые требования (умения)**
19	Уметь строить и исследовать простейшие математические модели

Характерная особенность задач 19 ЕГЭ – исследование элементов заданной последовательности следующего вида:

а) на наличие элемента, обладающего заданным свойством;

б) подсчет количества элементов, обладающих заданным свойством;

в) оценка (наибольшего или наименьшего значения) либо количества элементов, обладающих заданным свойством, либо некоторой числовой характеристики заданных элементов;

г) приведение примера, подтверждающего полученную оценку (*подразумевается, но в условии не формулируется*).

Классификация заданий 19 ЕГЭ:

1. **Задачи на арифметическую прогрессию.**
2. **Задачи на геометрическую прогрессию.**
3. **Задачи на произвольные последовательности чисел, заданные формулой *n*-го члена или каким-либо ограничением, накладываемым на их элементы.**
4. **Задачи на последовательности наборов чисел.**
5. **Задачи на последовательности ходов.**

Основные ошибки, допущенные участниками:

– ошибки в понимании логики задачи и анализе условия;
– неумение делать необходимые обоснования;
– неумение использовать свойства целых чисел;
– вычислительные ошибки.

Задание

На доске написано 100 различных натуральных чисел, сумма которых равна 5130.

а) Может ли оказаться, что на доске написано число 220?

б) Может ли оказаться, что на доске нет числа 12?

в) Какое наименьшее количество чисел, кратных 12, может быть на доске?

Решение.

а) Пусть на доске есть число 220. Тогда сумма остальных чисел равна 4910. Но эта сумма меньше, чем сумма наименьших 99 чисел:

$$1+2+\ldots+99=4950.$$

Значит, на доске не может быть числа 220.

б) Сумма 100 различных натуральных чисел, среди которых нет 12, не меньше чем

$$(1+2+\ldots+101)-12=5139.$$

Это противоречит тому, что сумма написанных чисел равна 5130.

в) Если на доске написано меньше пяти чисел, делящихся на 12, то сумма всех чисел будет не меньше

$$(1+2+...+100)-96-84-72-60+101+102+103+104=5148.$$

Значит, на доске написано не меньше пяти чисел, делящихся на 12.

Приведём пример 100 различных натуральных чисел, среди которых ровно пять делятся на 12, сумма которых равна 5130:

1, 2, …, 70, 71, 73, 74, …, 82, 83, 85, 86, …, 94, 95, 97, 98, 99, 100, 101, 102, 129.

Ответ: а) нет; б) нет; в) 5.

Содержание критерия	Баллы
Верно получены все перечисленные (см. критерий на 1 балл) результаты	4
Верно получены три из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	3
Верно получены два из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	2
Верно получен один из следующих результатов: — обоснованное решение пункта *а*; — обоснованное решение пункта *б*; — искомая оценка в пункте *в*; — пример в пункте *в*, обеспечивающий точность предыдущей оценки	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

1)

Найдём минимальную сумму 100 различных натуральных чисел: $S_{min} = \frac{(2+99)\cdot 100}{2} = 5050$

а) Заменим самое большое число, написанное на доске (100), на 220 $\Rightarrow$ $S_{min} = 5050 - 100 + 220 = 5170 > 5130 \Rightarrow$ на доске не может быть написанно 220. Если мы заменим не самое большое число, то сумма вырастет ещё больше, т.к $S = 5050 - m + 220$.

Ответ: нет

б) Если на доске нет числа 12, то возьмём наименьшее доступное вместо него, чтобы сумма была минимальна, то есть $101 \Rightarrow S_{min} = 5050 - 12 + 101 = 5139 > 1530 \Rightarrow$ число 12 обязательно есть

Ответ: Нет

2)

Сумму чисел от 1 до 99 найдем по формуле суммы n членов алгебраической прогрессии.

~~5130~~ $5130 - 220 \geq \frac{1+99}{2} \cdot 99$

$4950 \leq 4910$ (неверно!)

Ответ: нет.

б) Чтобы на доске не было 12, надо чтобы сумма чисел от 1 до 101 минус 12 была меньше или равна 5130

$101 \cdot \frac{1+101}{2} - 12 \leq 5130 \Leftrightarrow 101 \cdot 51 \leq 5142 \Leftrightarrow \cancel{51} 5151 \leq 5142$ (неверно!)

Ответ: нет

в) Убираем все наибольшие числа от 1 до 100 кратное 12 и заменяем их числами после 100. Разность 5130 и суммы чисел должна быть больше или равна 0.

$5130 - S_{100} = 5130 - \cancel{500}\ 5050 = 80$

Убираем 96, добавляем 101

$80 - 101 + 96 = 75 > 0$

Убираем 84, добавляем 102

$75 - 102 + 84 = 57 > 0$

Убираем 72, добавляем 103

$75 - 103 + 72 = \cancel{75}\ 57 - 31 = 26 > 0$

Убираем 60, добавляем 104

$26 - 107 + 60 \cancel{> 0} < 0$, значит убрать 60 нельзя.

Остались числа: 12, 24, 36, 48, 60 - это 5 чисел

Ответ: 5 чисел.

2)

Сумму чисел от 1 до 99 найдем по формуле суммы n членов алгебраической прогрессии.

~~5130~~ $5130-220 \geq \frac{1+99}{2} \cdot 99$

$4950 \leq 4910$ (неверно!)

Ответ: нет.

б) Чтобы на доске не было 12, надо чтобы сумма чисел от 1 до 101 минус 12 была меньше или равна 5130

$101 \cdot \frac{1+101}{2} - 12 \leq 5130 \iff 101 \cdot 51 \leq 5142 \iff$ ~~517~~ $5151 \leq 5142$ (неверно!)

Ответ: нет

в) Убираем все наибольшие числа от 1 до 100 кратные 12 и заменяем их числами после 100. Разность 5130 и суммы чисел должна быть больше или равна 0.

$5130 - S_{100} = 5130 - \cancel{500}\ 5050 = 80$

Убираем 96, добавляем 101

$80 - 101 + 96 = 75 > 0$

Убираем 84, добавляем 102

$75 - 102 + 84 = 57 > 0$

Убираем 72, добавляем 103

$75 - 103 + 72 = \cancel{73}\ 57 - 31 = 26 > 0$

Убираем 60, добавляем 104

$26 - 107 + 60\ \cancel{> 0} < 0$, значит убрать 60 нельзя.

Осталось числа: 12, 24, 36, 48, 60 – это 5 чисел

Ответ: 5 чисел.

3)

$$\sum_{k=1}^{100} = 5130; \quad n = 100$$

а) Нет. Если на доске написано число 220, то сумма остальных 99-ти чисел должна быть равна $(5130 - 220) = 4910$.

Проверим сумму чисел от 1 до 99 и если эта сумма будет больше 4910, то 220 не может находится на доске т.к. даже наим. сумма больше той, которая должна быть.

$$S_{1-99} = \frac{1+99}{2} 99 = 50 \cdot 99 = 4950; \quad 4950 > 4910 \Rightarrow \text{не может.}$$

3)

$$\sum_{k=1}^{100} = 5130; \quad n = 100$$

а) Нет. Если на доске написано число 220, то сумма остальных 99-ти чисел должна быть равна $(5130 - 220) = 4910$.

Проверим сумму чисел от 1 до 99 и если эта сумма будет больше 4910, то 220 не может находится на доске т.к. даже наим. сумма больше той, которая должна быть.

$$S_{1-99} = \frac{1+99}{2} 99 = 50 \cdot 99 = 4950; \quad 4950 > 4910 \Rightarrow \text{не может.}$$

4)

а) нет, т.к. сумма 99 чисел должна быть больше 4910, а если взять ч. от 1 до 99, то их сумма равна 4950, что больше 4910, значит последнее число будет меньше 220

б) нет, например возьмём числа [1; 11] их сумма = 66, и [13; 100], сумма = 4972, 4972 + 66 = 5038; 5130 - 5038 = 92, такое число мы брали => 12 нужно брать.

4)

а) нет, т.к. сумма 99 чисел должна быть больше 4910, а если взять ч. от 1 до 99, то их сумма равна 4950, что больше 4910, значит последнее число будет меньше 220

б) нет, например возьмём числа [1; 11] их сумма = 66, и [13; 100], их сумма = 4972, 4972+66 = 5038; 5130 − 5038 = 92, такое число мы брали => 12 нужно брать.

Рассмотрен частный случай

5)

$n = 100$ - кол-во чисел

$S = 5100$. - их сумма

$S_n = \left(\frac{1+n}{2}\right) \cdot n$. сумма первых n-членов арифметич. прогрессии

а) да может, т.к. $5100 - 250 = 4850$.

Найдем сумму первых 99 чисел: $S_{99} = \frac{(1+99)}{2} \cdot 99 = \underline{4850}$

и $4850 + 250 = \underline{5100}$

б) Сумма 98 первых чисел без 11 равна: $4850 - 11 = 4839$,

т.е за два различных числа больших чем 99 мы должны

получить $5100 - 4839 = 261$, это возможно (Н-р: $150 + 111$),

следовательно на доске числа 11 может не быть

Ответ: а) да может; б) да может; в) минимум 4 числа.

в) Вычтем все числа кратные 11, получим: ~~4850 - 495~~ =

~~= 4355~~ $11 + 22 + 33 + \ldots + 99 = 495$, $495 + 250 = 745$, т.е

необходимо получить 745 10 числами > 99 и не кратными 11, это будет больше $10 \cdot 100 = 1000$,

а нам нужно $745 \Rightarrow$ 6 чисел больше 100 и 4 кратных 11

5)

5050

$n = 100$ - кол-во чисел $\qquad S_n = \left(\frac{1+n}{2}\right) \cdot n$. сумма первых n-членов арифметич. прогрессии

$S = 5100$, - их сумма

4950

а) да может, т.к. $5100 - 250 = 4850$.

Найдем сумму первых 99 чисел: $S_{99} = \frac{(1+99)}{2} \cdot 99 = \underline{4850}$

и $4850 + 250 = \underline{5100}$

б) Сумма 98 первых чисел без 11 равна: $\underline{4850} - 11 = 4839$,

т.е за два различных числа больших чем 99 мы должны получить $\underline{5100} - 4839 = 261$, это возможно (Н-р: 150 + 111), следовательно на доске числа 11 может не быть

Ответ: а) да может; б) да может; в) минимум 4 числа.

в) Вычтем $\underline{\text{все}}$ числа кратные 11, получим: ~~4850 − 495~~ =

= ~~4355~~ $11 + 22 + 33 + \ldots + 99 = 495$, $495 + \underline{250} = 745$, т.е необходимо получить 745 10 числами > 99 и не кратными 11, это будет больше $10 \cdot 100 = 1000$, а нам нужно 745 $\Rightarrow$ 6 чисел больше 100 и 4 кратных 11

6)

а) да, потому что это натуральное число и оно меньше 5100

б) оно может как быть так и не быть потому что оно подходит условию задачи. Поэтому 50/50

в) 99

б)

а) да, потому что это натуральные число и оно меньше 5100

б) оно может как быть так и не быть потому что оно подходит условию задачи. Поэтому 50/50

в) 99