Стереометрическая задача (№14) диагностического профильного экзамена по математике: задание, решения, оформление, ошибки

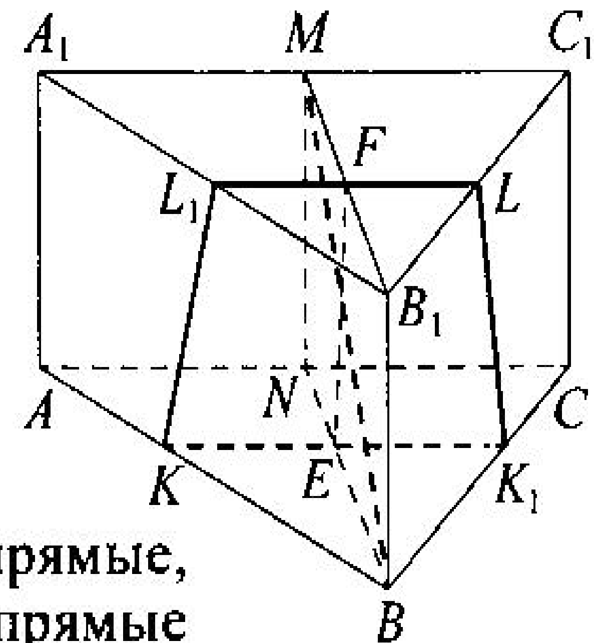
Задание №14

В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ сторона AB основания равна 6, а боковое ребро AA_1 равно 3. На ребре AB отмечена точка K так, что $AK=1$. Точки M и L – середины ребер A_1C_1 и B_1C_1 соответственно. Плоскость γ параллельна прямой AC и содержит точки K и L.

А) Докажите, что прямая BM перпендикулярна плоскости γ.

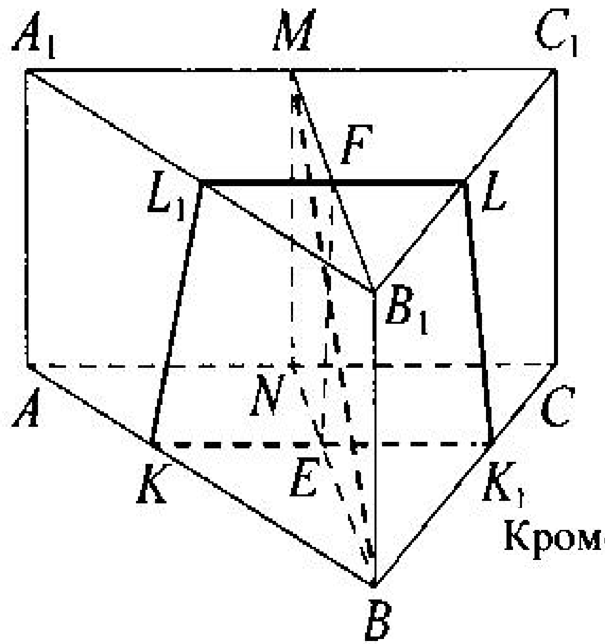
Б) Найдите расстояние от точки C до плоскости γ.

Задание №14



а) Проведём через точки K и L прямые, параллельные AC. Пусть эти прямые пересекают рёбра BC и A_1B_1 в точках K_1 и L_1 соответственно (рис. 1). Тогда трапеция KL_1LK_1 является сечением исходной призмы плоскостью γ. Рассмотрим плоскость BB_1M. Пусть эта плоскость пересекает прямые AC, KK_1 и LL_1 в точках N, E и F соответственно.

Задание №14



Четырёхугольник BB_1MN — прямоугольник, причём

$$BB_1 = 3,\ B_1M = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot A_1B_1 = 3\sqrt{3}.$$

Кроме того, $NE : EB = AK : KB = 1:5$, $B_1F : FM = B_1L : LC_1 = 1:1$,

$$MF = \frac{3\sqrt{3}}{2},\ NE = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Пусть FP — высота трапеции EFB_1B (рис. 2), тогда

$$EP = MF - NE = \sqrt{3}.$$

Поскольку $\operatorname{tg}\angle BEF = \dfrac{FP}{EP} = \sqrt{3} = \dfrac{MB_1}{BB_1} = \operatorname{tg}\angle MBB_1$,

$$\angle BEF = \angle MBB_1 = 90° - \angle MBE,$$

то есть прямые EF и BM перпендикулярны.

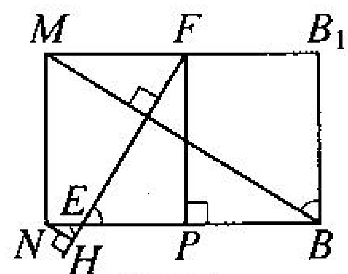
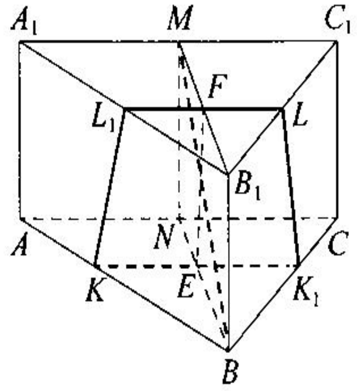


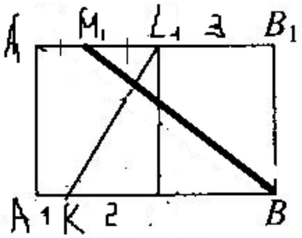
Рис. 2

Прямая KK_1 параллельна прямой AC, которая перпендикулярна плоскости BB_1M. Значит, прямые KK_1 и EF перпендикулярны прямой BM, поэтому прямая BM перпендикулярна плоскости γ.

Задание №14



Рассмотрим теперь проекцию M_1 точки M на плоскость AA_1BB_1.



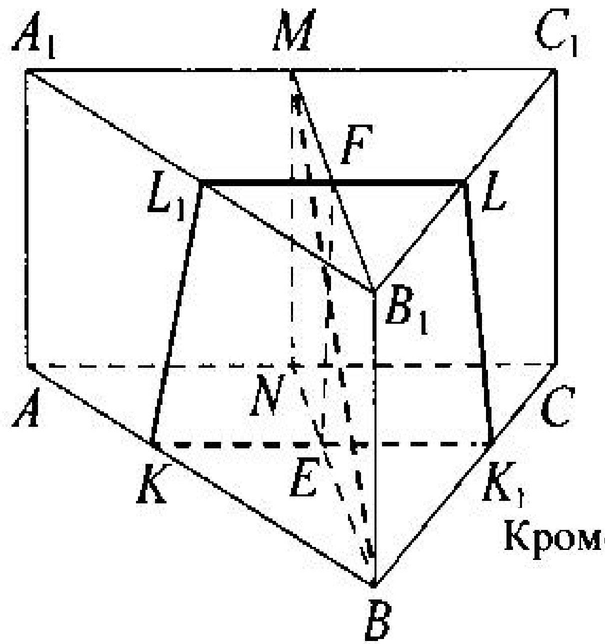
Докажем, что прямая BM_1 перпендикулярна KL_1. Тогда по теореме о трех перпендикулярах окажется что , а BM перпендикулярна KL_1

tg $L_1BK=AA_1/4,5$

tg $L_1KB=AA_1/2$

tg L_1BK tg $L_1KB=(AA_1)^2/9=1$

Задание №14

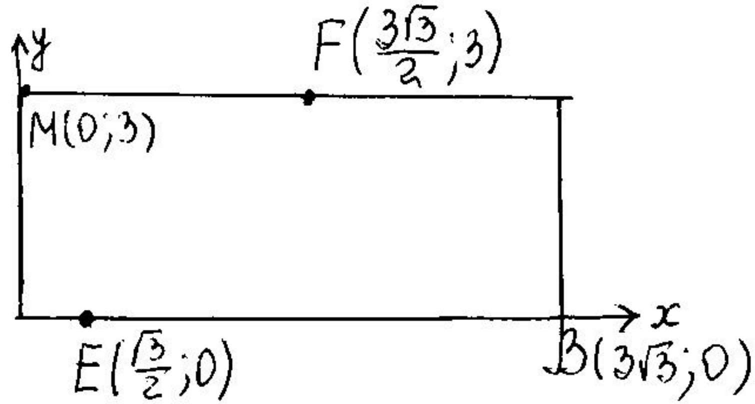


Четырёхугольник BB_1MN — прямоугольник, причём

$$BB_1 = 3,\ B_1M = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot A_1B_1 = 3\sqrt{3}.$$

Кроме того, $NE : EB = AK : KB = 1:5$, $B_1F : FM = B_1L : LC_1 = 1:1$,

$$MF = \frac{3\sqrt{3}}{2},\ NE = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

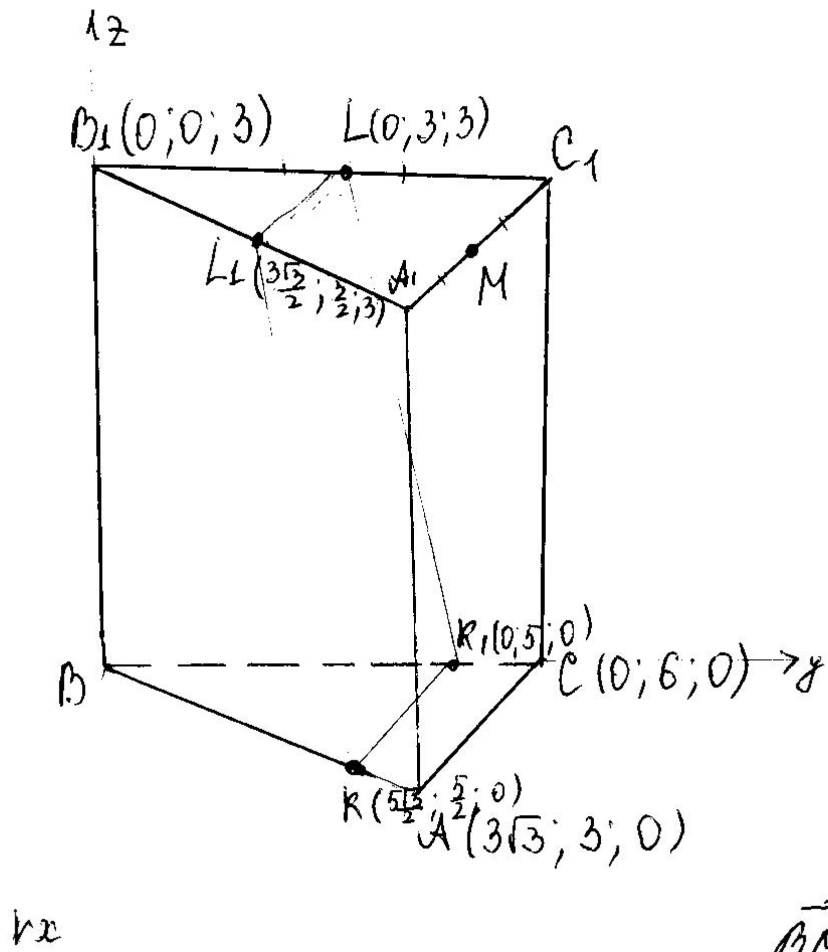


$\overrightarrow{BM}\{3\sqrt{3}; -3\}$

$\overrightarrow{EF}\{\sqrt{3}; 3\}$

$\overrightarrow{BM} \cdot \overrightarrow{EF} = 3\sqrt{3} \cdot \sqrt{3} + (-3) \cdot 3 = 0$

Задание №14



$M\left(\frac{3\sqrt{3}}{2};\ \frac{9}{2};\ 3\right)$

$\vec{BM}\left\{\frac{3\sqrt{3}}{2};\ \frac{9}{2};\ 3\right\}$

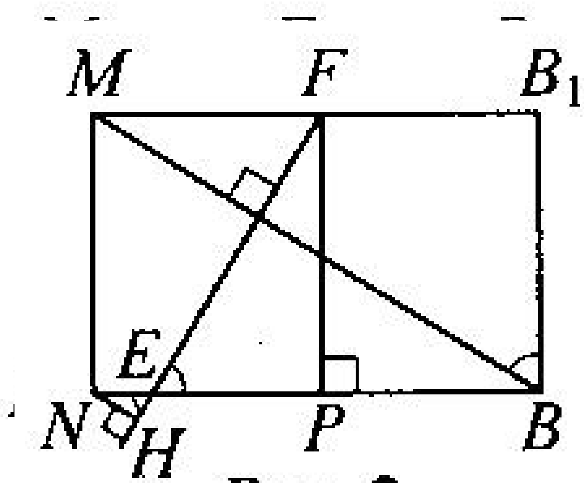
$\vec{L_1L}\left\{-\frac{3\sqrt{3}}{2};\ \frac{3}{2};\ 0\right\}$

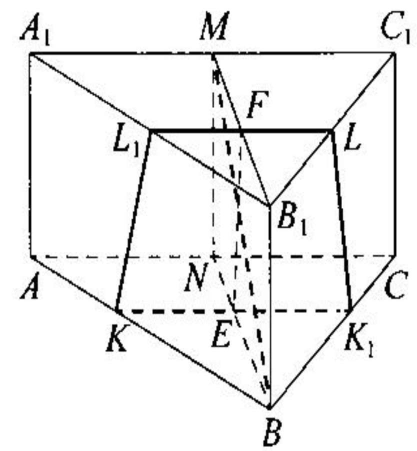
$\vec{L_1K}\left\{\sqrt{3};\ 1;\ -3\right\}$

$\vec{BM}\cdot\vec{L_1L}=-\frac{27}{4}+\frac{27}{4}=0$

$\vec{BM}\cdot\vec{L_1K}=\frac{9}{2}+\frac{9}{2}-9=0$

Задание №14

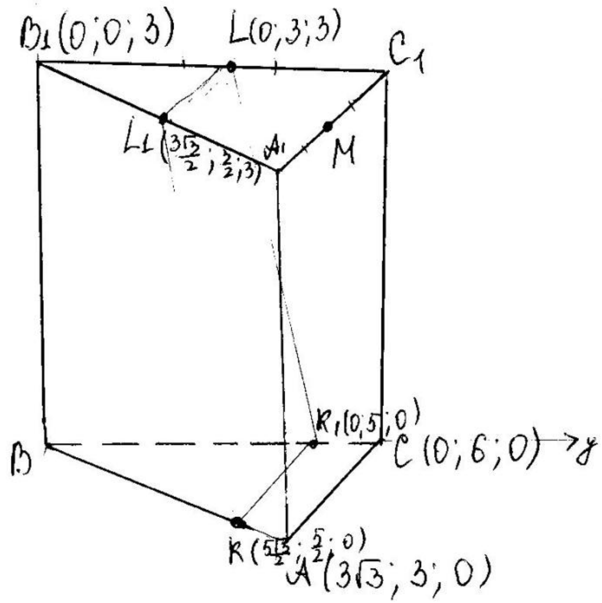




б) Поскольку прямая AC параллельна плоскости γ, расстояние от точки C до плоскости γ равно расстоянию от точки N до прямой EF. Опустим из точки N перпендикуляр NH на прямую EF. Тогда

$$NH = NE \cdot \sin\angle NEH = NE \cdot \sin\angle BEF = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3}{4}.$$

Задание №14



$\overrightarrow{BM}\left\{\frac{3\sqrt3}{2};\ \frac{9}{2};\ 3\right\}$

$\rho(C;\gamma)$ - ?

т.к. $BM \perp \gamma \Rightarrow \vec{n} \parallel \overrightarrow{BM}$ $\quad \vec{n}\{\sqrt3;\ 3;\ 2\}$

$\gamma:\ \sqrt3x+3y+2z+d=0$ $\quad \gamma:\ \sqrt3x+3y+2z-15=0$

$L\in\gamma \Rightarrow \sqrt3\cdot0+3\cdot3+2\cdot3+d=0$
$d=-15$

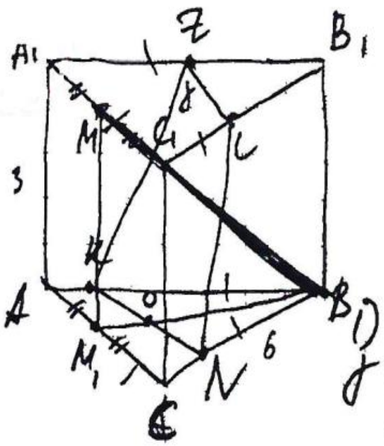
$\rho(C;\gamma)=\dfrac{|3\cdot6-15|}{\sqrt{\sqrt3^2+3^2+2^2}}=\dfrac{3}{4}$

Задание №14

- *Критерии:*

Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а* и обоснованно получен верный ответ в пункте *б*	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а* ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте *б*	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

Задание №14



Дано: $ABCA_1B_1C_1$ – прав. треуг. призма; $AB=6$; $AA_1=3$; $AK=1$; $A_1M=MC_1$; $C_1L=LB_1$; $\gamma \parallel AC$

Док-ть: $BM \perp \gamma$

Найти: от C до γ

Решение:

1) построим плоскость γ: – построим $KN \parallel AC$ т.к. $\gamma \parallel AC$. – соединим C и N т.к. они лежат в одной плоскости. – построим $LZ \parallel KN \parallel AC$.

2) Опустим $\perp MM_1$ на пл-ть ABC; M_1B – проекция MB. $\Rightarrow$

$\angle$ между BM и γ = $\angle M_1B$ и γ = $\angle M_1B$ и KN *.

3) $AM_1=M_1C$ т.к. $A_1M=MC_1$ и $MM_1 \perp A_1C_1$ и AC $\Rightarrow$ M_1B – медиана, т.к. $\triangle ABC$ – равносторонний (по опр. прав. призмы), то M_1B – высота, медиана, биссектриса. $\Rightarrow$ $M_1B \perp AC$, а $AC \parallel KN$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow BM_1 \perp KN \Rightarrow MB \perp \gamma$.

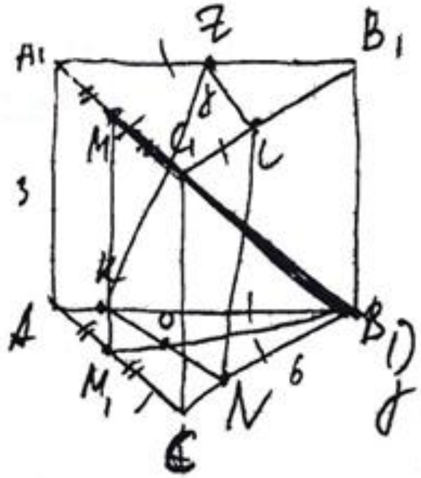
Ч.и т.д.

Задание №14

Дано: $ABCA_1B_1C_1$ – прав. треуг. призма; $AB=6$; $AA_1=3$; $AK=1$; $A_1M=MC_1$; $C_1L=LB_1$; $\gamma \parallel AC$

Док-ть: $BM \perp \gamma$

Найти: от C до γ



Решение:

1) построим плоскость γ: – построим $KN \parallel AC$ т.к. $\gamma \parallel AC$. – соединим C и N т.к. они лежат в одной плоскости. – построим $LZ \parallel KN \parallel AC$.

2). Опустим $\perp MM_1$ на пл-ть ABC; M_1B – проекция MB. $\Rightarrow$

$\angle$ между BM и γ = $\angle M_1B$ и γ = $\angle M_1B$ и KN *.

3) $AM_1=M_1C$ т.к. $A_1M=MC_1$ и $MM_1 \perp A_1C_1$ и AC $\Rightarrow$ M_1B – медиана, т.к. $\triangle ABC$ – равносторонний (по опр. прав. призмы), то M_1B – высота, медиана, бессектриса. $\Rightarrow$ $M_1B \perp AC$, а $AC \parallel KN$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ $BM_1 \perp KN \Rightarrow MB \perp \gamma$.

Ч.и т.д.

Задание №14

Дано:

$ABCA_1B_1C_1$ - прав. тр. призма

$AB = 6$

$AA_1 = 3$

$AK = 1$

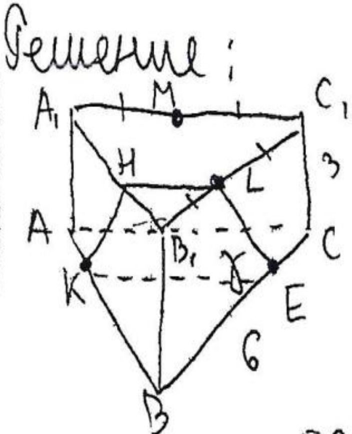
M и L - сер. A_1C_1 и B_1C_1

$\gamma \parallel AC$ и γ содержит K и L

а) Д-ть: $BM \perp \gamma$

б) Расстояние от C до γ

Решение:

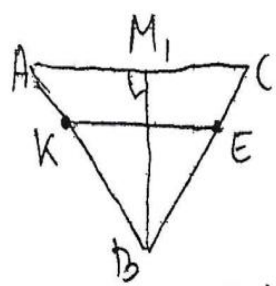


Пусть γ пересекает A_1B_1 в (·) H и BC в (·) E

$\gamma \parallel AC \Rightarrow HL \parallel AC$ и $KE \parallel AC$

KE будет отсекать в $\triangle ABC$ равные отрезки $\Rightarrow EC = AK = 1$

EC - наикратчайшее расстояние от C до $\gamma \Rightarrow$ пункт (б) найден



Опустим проекцию BM на $\triangle ABC$

Т.к. M - сер. $A_1C_1 \Rightarrow M_1$ - сер. $AB \Rightarrow$

$\Rightarrow BM_1$ - высота $\triangle ABC$ (т.к. $\triangle ABC$ прав.)

$BM_1 \perp AC$, $KE \parallel AC \Rightarrow BM_1 \perp KE \Rightarrow$

По т-ме о трёх перпендикулярах $BM \perp \gamma$

ч.т.д.

Ответ: б) 1.

Задание №14

Дано:

$ABCA_1B_1C_1$ - прав. тр. призма

$AB = 6$

$AA_1 = 3$

$AK = 1$

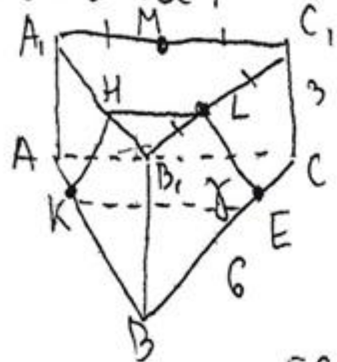
M и L - сер. A_1C_1 и B_1C_1

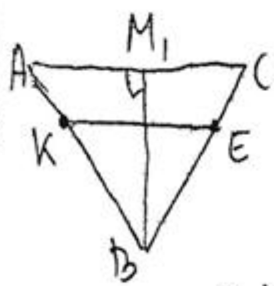
$\gamma \parallel AC$ и γ содержит K и L

а) Д-ть: $BM \perp \gamma$

б) Расстояние от C до γ

Решение:





Пусть γ пересекает A_1B_1 в (·) H и BC в (·) E

$\gamma \parallel AC \Rightarrow HL \parallel AC$ и $KE \parallel AC$

KE будет отсекать в $\triangle ABC$ равные отрезки $\Rightarrow EC = AK = 1$

EC - наикратчайшее расстояние от C до $\gamma \Rightarrow$ пункт (б) найден

Опустим проекцию BM на $\triangle ABC$

Т.к. M - сер. $A_1C_1 \Rightarrow M_1$ - сер. $AB \Rightarrow$

$\Rightarrow BM_1$ - высота $\triangle ABC$ (т.к. $\triangle ABC$ прав.)

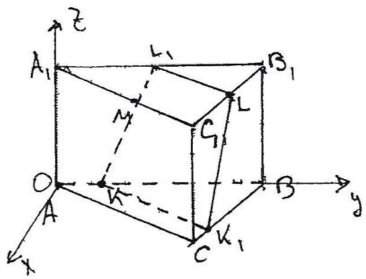
$BM_1 \perp AC$, $KE \parallel AC \Rightarrow BM_1 \perp KE \Rightarrow$

По т-ме о трёх перпендикулярах $BM \perp \gamma$

ч.т.д.

Ответ: б) 1.

Задание №14



Дано: $ABCA_1B_1C_1$ - прав треуг. призма; $AB=6$; $AA_1=3$

$K\in AB$: $AK=1$; M - серед. A_1C_1; L - сер. B_1C_1; $\gamma \parallel AC$

$K\subset \cancel{\beta}\gamma$; $L\subset\gamma$.

а) Д-ть: $BM\perp\gamma$

б) Найти: $\rho(C;\gamma)$

Док-во:

Построение пл-ти γ: $KK_1\parallel AC$; K_1L; $LL_1\parallel AC$ | KL_1

KK_1L - пл-ть γ.

Поместим призму в систему координат OXYZ

$B(0;6;0)$

$M\left(\frac{3\sqrt3}{2};\frac{3}{2};3\right)$ $\qquad \vec{BM}\left\{\frac{3\sqrt3}{2};-\frac{9}{2};3\right\}$.

$K(0;1;0)$

$L_1(0;3;3)$

$L\left(\frac{3\sqrt3}{2};\frac{9}{2};3\right)$

$$\begin{cases} B+D=0 \\ 3B+3C+D=0 \\ \frac{3\sqrt3}{2}A+\frac{9}{2}B+3C+D=0 \end{cases}$$

$B=-D$

$3C+D=-3B$

$\frac{3\sqrt3}{2}A+\frac{9}{2}B-3B=0$ $\qquad \vec{n}\left\{1;-\sqrt3;\frac{2\sqrt3}{3}\right\}$.

$\boxed{B=-\sqrt3A}$

$-3\sqrt3A+3C+\cancel{B}^{\sqrt3A}=0.$

$C=\frac{2\sqrt3A}{3}$

$Ax_0-\sqrt3Ay_0+\frac{2\sqrt3}{3}Az_0+\sqrt3A=0$

$$\sin(\gamma;BM)=\frac{|\vec{n}\cdot\vec{BM}|}{|\vec{n}|\cdot|\vec{BM}|}=$$

$$=\frac{\left|\frac{3\sqrt3}{2}+\frac{9\sqrt3}{2}+2\sqrt3\right|}{\sqrt{1+3+\left(\frac{2\sqrt3}{3}\right)^2}\cdot\sqrt{\left(\frac{3\sqrt3}{2}\right)^2+\left(\frac{9}{2}\right)^2+3^2}}=$$

Задание №14
Основные ошибки связаны с:

- - незнанием признака перпендикулярности прямой и плоскости;
- - неумением построить перпендикуляр из точки к данной плоскости;
- - неумением анализировать пространственные конфигурации;
- - неумением задавать координаты конкретных точек в введенной системе координат;
- - вычислительные ошибки.

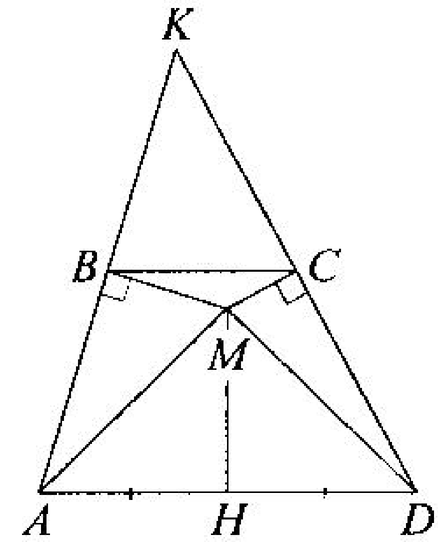
Планиметрическая задача (№16)
диагностического профильного экзамена по математике:
задание, решения, оформление, ошибки

Задание №16

В трапеции ABCD основания BC и AD равны 11 и 22 соответственно. Внутри трапеции взяли точку M так, что углы ABM и DCM прямые.

а) Докажите, что AM = DM.
б) Найдите угол BAD, если угол ADC равен 72°, а расстояние от точки M до прямой AD равно стороне BC.

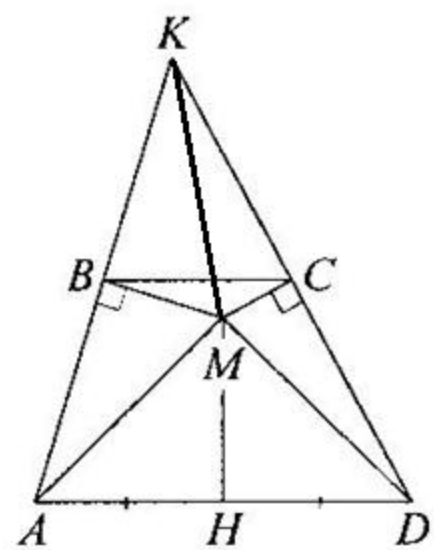
Задание №16



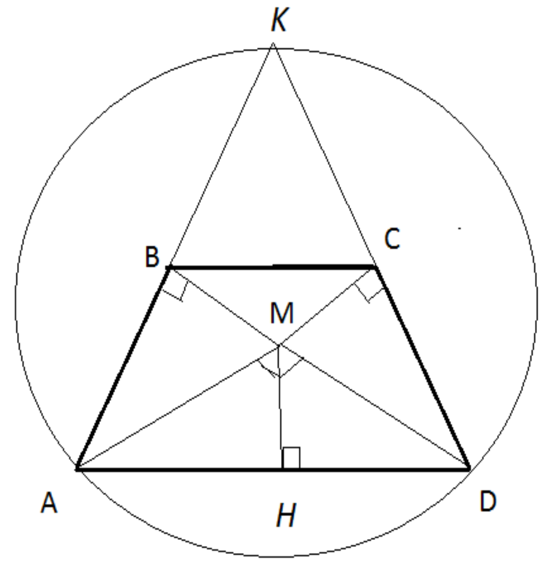
а) Пусть прямые AB и CD пересекаются в точке K. Тогда треугольники AKD и BKC подобны с коэффициентом подобия 2, поскольку $AD = 2BC$. Значит, B и C — середины AK и DK соответственно. Таким образом, BM и CM — серединные перпендикуляры в треугольнике AKD, а M — центр описанной около этого треугольника окружности, поэтому $AM = DM$.

Задание №16

а) Продлим боковые стороны трапеции. Так как $BC = \frac{1}{2}AD$, то BC — средняя линия треугольника AKD, тогда $KC = CD$, $KB = BA$. Углы MCD и MBA прямые, из чего следует, что MC и MB — медианы и высоты, тогда треугольники KMD и KMA — равнобедренные, то есть $KM = MD$, $KM = MA$, а значит, $MD = MA$, что и требовалось доказать.



Задание №16



Расстояние от точки М до стороны AD равно высоте равнобедренного Δ AMH.

По условию MH=BC; AD=2BC

Значит AH=HD=MH

Треугольники AHM и DHM – прямоугольные, равнобедренные.

∠ MAH= ∠ MDH=45 °. Значит ∠ AMD=90 °

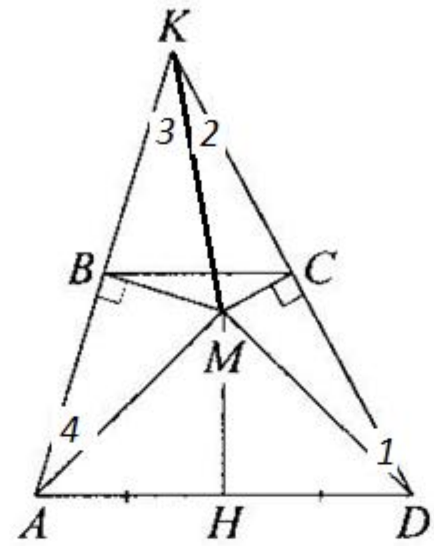
∠ AMD – центральный угол, измеряется дугой, на которую опирается.

∠ AKD – вписанный угол, измеряется половиной дуги, на которую опирается, ∠ AKD =45 °.

Сумма углов треугольника AKD равна 180 °, значит

∠ BAD=180 – ∠ AKD – ∠ ADK=180 – ∠ APD – ∠ ADC=180 – 45 – 72 = 63 °.

Задание №16



Расстояние от точки M до стороны AD равно высоте равнобедренного Δ AMH.
По условию MH=BC; AD=2BC
Значит AH=HD=MH

Треугольники AHM и DHM – прямоугольные, равнобедренные.
∠ MAH= ∠ MDH=45 °.

Так как KM=MD, то ∠ 1= ∠2 = ∠ADC- ∠MDH = 72 – 45 = 27^0.

Так как KM=MA, то ∠3= ∠4 = x.

Так как сумма углов в Δ ADK равна 180^0, то выполнено:

$2\cdot45+2\cdot27+2\cdot x=180$, откуда x=18.

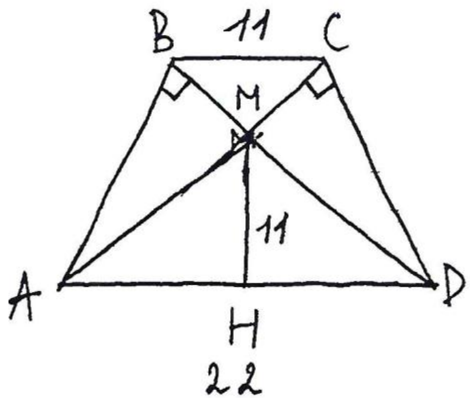
Поэтому ∠ BAD= ∠ 4+ ∠ MAH=18+45= 63 °.

Задание №16

- *Критерии:*

Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а* и обоснованно получен верный ответ в пункте *б*	3
Обоснованно получен верный ответ в пункте *б* ИЛИ имеется верное доказательство утверждения пункта *а* и при обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, ИЛИ при обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки, ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте *б* с использованием утверждения пункта *а*, при этом пункт *а* не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

Задание №16



Дано: ABCD – трапеция;

$BC = 11$; $AD = 22$; $\angle ABM = \angle DCM = 90$

б) $\angle ADC = 72°$; $MH = BC = 11$;

$\angle BAD$ – ?

а) Доказать: $AM = DM$

Решение:

б) $\angle ABM = \angle DCM \Rightarrow$ M – середина трапеции $\Rightarrow$ трапеция ABCD – равнобедренная $\Rightarrow$ углы при основаниях равны: $\angle BAD = \angle ADC = 72°$;

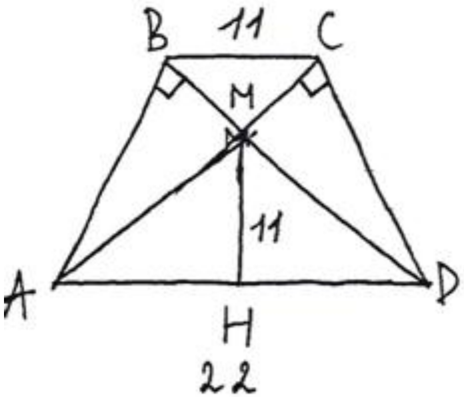
а) AC и BD – диагонали и они равны $\Rightarrow$

$\Rightarrow AM = DM$

Ответ: а) Доказано.

б) $\angle BAD = \angle ADC = 72°$

Задание №16



Дано: ABCD – трапеция;

$BC = 11$; $AD = 22$; $\angle ABM = \angle DCM = 90$

б) $\angle ADC = 72°$; $MH = BC = 11$;

$\angle BAD$ – ?

а) Доказать: $AM = DM$

Решение:

б) $\angle ABM = \angle DCM \Rightarrow$ M – середина трапеции $\Rightarrow$ трапеция ABCD – равнобедренная $\Rightarrow$ углы при основаниях равны: $\angle BAD = \angle ADC = 72°$;

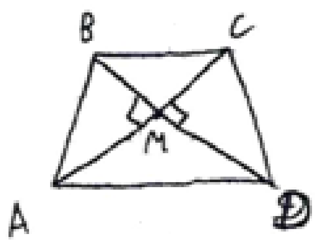
а) AC и BD – диагонали и они равны $\Rightarrow$

$\Rightarrow AM = DM$

Ответ: а) Доказано.

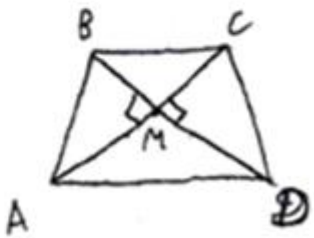
б) $\angle BAD = \angle ADC = 72°$

Задание №16



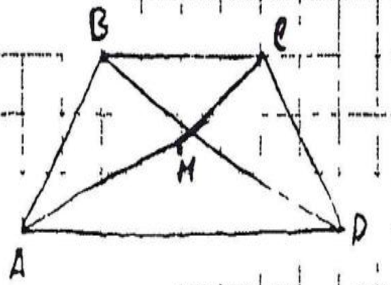
а) Трапеция $ABCD$ – равнобедренная т. к., нижнее основание в 2 раза больше верхнего, значит боковые стороны этой трапеции равны. Точка M - является точкой пересечения диагоналей в равнобедренной трапеции. А мы знаем, что диагонали в равнобедренной трапеции равны, значит $AM = DM$

Задание №16



а) Трапеция ABCD - равнобедренная т. к., нижнее основание в 2 раза больше верхнего, значит боковые стороны этой трапеции равны. Точка M - является точкой пересечения диагоналей в равнобедренной трапеции. А мы знаем, что диагонали в равнобедренной трапеции равны, значит $AM = DM$ ■

Задание №16



1) $BC \parallel AD$ т.к трапеция (по св-ву трапеции)

$\Rightarrow \angle BAM = \angle ACD$ как накрест лежащие

аналогично $\angle ABD = \angle BDC$

Рассмотрим $\triangle ABM$ и $\triangle MCD$

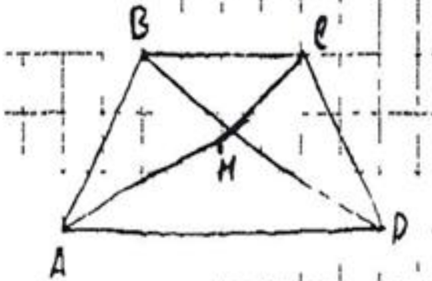
1. $\angle ABM = \angle MCD$ по условию

2. $\angle BAM = \angle MDC$ как накрест лежащие

3. $\angle BMA = \angle CMD$ как скрещивающиеся

$\Rightarrow \triangle ABM = \triangle DCM$, а значит $AM = DC$ ч.т.д.

Задание №16



1) $BC \parallel AD$ т.к трапеция (по св-ву трапеции)

=> $\angle BAM = \angle ACD$ как накрест лежащие

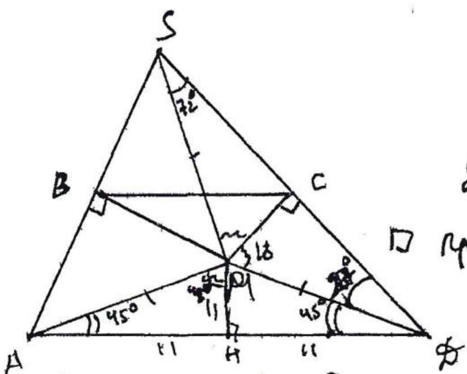
аналогично $\angle ABD = \angle BDC$

Рассмотрим $\triangle ABM$ и $\triangle MCD$

1. $\angle ABM = \angle MCD$ по условию
2. $\angle BAM = \angle MDC$ как накрест лежащие
3. $\angle BMA = \angle CMD$ как скрещивающиеся

=> $\triangle ABM = \triangle DCM$, а значит $AM = DC$ ч.т.д.

Задание №16



Дано: $BC = 11$; $AD = 22$

а) Док-ть $AM = DM$

Док-во:

□ продлим AB и CD до пересечения в т. S

$\triangle ASD \sim \triangle BSC \Rightarrow \frac{SB}{AS} = \frac{SC}{SD} = \frac{BC}{AD} = \frac{1}{2}$

$\Rightarrow AB = BS$ и $SC = CD$. Заметим, что BO и CO серединные перпендикуляры $\Rightarrow M$ – центр описанной окр. около $\triangle ASD \Rightarrow SM = MA = MD$ т.к. это радиусы этой окр ■

б) Найти: $\angle BAD$

Решение: $\triangle MHD$ прямоугольный и равнобедренный $\Rightarrow \angle HDM = \angle HMD = 45°$. Заметим, что $\triangle DMS$ – равноб $\Rightarrow MC$ – высота и биссектриса $\Rightarrow \angle DMC = 63° = \angle CMS \Rightarrow \angle SMD = 126°$;

$\angle AMD = \angle AMH + \angle HMD = 90°$; $\triangle AMD$ – равноб. $\Rightarrow \angle MDH = \angle MAH \Rightarrow$; $\angle MAH = 45°$

$\angle SMA = 360° - \angle SMD - \angle AMD = 360° - 126° - 90° = 144$

$\angle BMA = \frac{1}{2}\angle SMA = 72°$; $\angle MBA = 90 - 72 = 18°$; $\angle BAH = 45 + 18 = 63°$

Ответ: б) $63°$

Задание №16
Основные ошибки:

- неверное понимание условия задачи;
- при построении чертежа;
- незнание признаков равенства треугольников;
- вычислительные ошибки.

Задача с параметром (№18) диагностического профильного экзамена по математике: задание, решения, оформление, ошибки

Задание №18

Найдите все значения a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + 2(a-3)x - 4ay + 5a^2 - 6a = 0, \\ y^2 = x^2 \end{cases}$$

имеет ровно четыре различных решения.

Задание №18

Первое уравнение системы равносильно уравнению

$$(x+a-3)^2+(y-2a)^2=9.$$

Это уравнение задаёт окружность ω радиусом 3 с центром в точке $(3-a;2a)$.

Второе уравнение системы задаёт пару прямых $y=x$ и $y=-x$, пересекающихся в точке $(0;0)$.

Задание №18

Первое уравнение системы равносильно уравнению

$$(x+a-3)^2+(y-2a)^2=9.$$

Это уравнение задаёт окружность ω радиусом 3 с центром в точке $(3-a; 2a)$. Второе уравнение системы задаёт пару прямых $y=x$ и $y=-x$, пересекающихся в точке $(0;0)$.

Прямая и окружность имеют не более двух общих точек. Значит, исходная система уравнений имеет ровно четыре различных решения тогда и только тогда, когда окружность ω пересекается с каждой из прямых $y=x$ и $y=-x$ в двух точках и не проходит через их точку пересечения $(0;0)$.

Задание №18

Число точек пересечения окружности ω с прямой $y = x$ равно числу корней квадратного уравнения

$$2x^2 - 2(a+3)x + 5a^2 - 6a = 0.$$

Это уравнение имеет ровно два корня при положительном дискриминанте:

$$4(a+3)^2 - 8\left(5a^2 - 6a\right) > 0;\ a^2 - 2a - 1 < 0,$$

откуда $1 - \sqrt{2} < a < 1 + \sqrt{2}$.

Задание №18

Число точек пересечения окружности ω с прямой $y = x$ равно числу корней квадратного уравнения

$$2x^2 - 2(a+3)x + 5a^2 - 6a = 0.$$

Это уравнение имеет ровно два корня при положительном дискриминанте:

$$4(a+3)^2 - 8\left(5a^2 - 6a\right) > 0;\ a^2 - 2a - 1 < 0,$$

откуда $1 - \sqrt{2} < a < 1 + \sqrt{2}$.

Число точек пересечения окружности ω с прямой $y = -x$ равно числу корней квадратного уравнения

$$2x^2 + 2(3a-3)x + 5a^2 - 6a = 0.$$

Это уравнение имеет ровно два корня при положительном дискриминанте:

$$4(3a-3)^2 - 8\left(5a^2 - 6a\right) > 0;\ a^2 + 6a - 9 < 0,$$

откуда $-3 - 3\sqrt{2} < a < -3 + 3\sqrt{2}$.

Задание №18

$$1-\sqrt{2}<a<1+\sqrt{2}$$

$$-3-3\sqrt{2}<a<-3+3\sqrt{2}$$

Окружность ω проходит через точку $(0;0)$ при $5a^2-6a=0$, то есть при $a=0$ и $a=1{,}2$.

Задание №18

$$1-\sqrt{2}<a<1+\sqrt{2}$$

$$-3-3\sqrt{2}<a<-3+3\sqrt{2}$$

Окружность ω проходит через точку $(0;0)$ при $5a^2-6a=0$, то есть при $a=0$ и $a=1,2$.

Таким образом, исходная система уравнений имеет ровно четыре решения при $1-\sqrt{2}<a<0$; $0<a<1,2$; $1,2<a<-3+3\sqrt{2}$.

Ответ: $1-\sqrt{2}<a<0$; $0<a<1,2$; $1,2<a<-3+3\sqrt{2}$

Задание №18

У прямой и окружности будет две общие точки, если расстояние от центра окружности до прямой будет меньше радиуса этой окружности

Первое уравнение системы равносильно уравнению

$$(x+a-3)^2+(y-2a)^2=9.$$

Это уравнение задаёт окружность ω радиусом 3 с центром в точке $(3-a; 2a)$.

Второе уравнение системы задаёт пару прямых $y=x$ и $y=-x$,

Задание №18

радиусом 3 с центром в точке $(3-a; 2a)$

$l_1: \quad y - x = 0$

$$\rho(O; l_1) = \frac{|2a-(3-a)|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}} = \frac{|3a-3|}{\sqrt{2}}$$

$$\frac{|3a-3|}{\sqrt{2}} < 3 \qquad |3a-3| < 3\sqrt{2}$$

$$-\sqrt{2} < a-1 < \sqrt{2}$$

$$1-\sqrt{2} < a < \sqrt{2}+1$$

Задание №18

радиусом 3 с центром в точке $(3-a; 2a)$

$l_1: \quad y - x = 0$

$$\rho(O; l_1) = \frac{|2a - (3-a)|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = \frac{|3a-3|}{\sqrt{2}}$$

$$\frac{|3a-3|}{\sqrt{2}} < 3 \qquad |3a-3| < 3\sqrt{2}$$

$$-\sqrt{2} < a - 1 < \sqrt{2}$$

$$1 - \sqrt{2} < a < \sqrt{2} + 1$$

$l_2: \quad y + x = 0$

$$\rho(O; l_2) = \frac{|2a + (3-a)|}{\sqrt{2}} = \frac{|a+3|}{\sqrt{2}}$$

$$\frac{|a+3|}{\sqrt{2}} < 3 \qquad |a+3| < 3\sqrt{2}$$

$$-3\sqrt{2} < a + 3 < 3\sqrt{2}$$

$$-3\sqrt{2} - 3 < a < 3\sqrt{2} - 3$$

Задание №18

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	4
С помощью верного рассуждения получено множество значений a, отличающееся от искомого только включением точек $a = 1 - \sqrt{2}$ и / или $a = -3 + 3\sqrt{2}$	3
С помощью верного рассуждения получен промежуток $\left(1-\sqrt{2}; -3+3\sqrt{2}\right)$, возможно, с включением граничных точек и / или исключением одной из точек $a = 0$ или $a = 1{,}2$ ИЛИ получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом верно выполнены все шаги решения	2
Верно рассмотрен хотя бы один из случаев решения и получен один из промежутков $\left(1-\sqrt{2}; 1+\sqrt{2}\right)$ или $\left(-3-3\sqrt{2}; -3+3\sqrt{2}\right)$, возможно, с включением граничных точек ИЛИ задача верно сведена к исследованию взаимного расположения окружности и прямых (аналитически или графически)	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

Задание №18

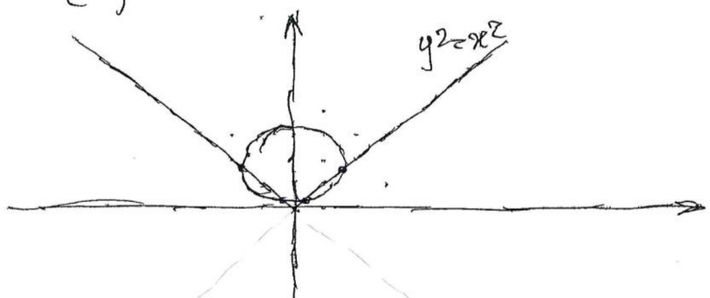
$$\begin{cases} x^2+y^2-6(a-2)x-2ay+10a^2-36a+32=0 \\ y^2=x^2 \end{cases}$$

$x^2+y^2-6(a-2)x-2ay+10a^2-36a+32=(y-a)^2+(x-3(a-2))^2-4$

$(y-a)^2+(x-3(a-2))^2=4$ – уравнение окружности с $R=2$

$y^2=x^2 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} y=-x \\ y=x \end{array}\right.$

центр окр.



Если вершина находится в точке $(0;2)$, то решений 3, а если $(0;3)$, то 2. $\Rightarrow$ каждая половина окружности должна пересекать прямую $y=-x$ или $y=x$ в 2 точках, а т.к. центры $(0;2)$ и $(0;3)$ окружности ~~они~~ являются крайними точками $\Rightarrow$

$x=0$, $y\in(2;3) \Rightarrow (y-a)\in(2;3)$ ∵ $x-3(a-2)=0$

$x=3a-6$ $\quad \begin{cases} y=-3a+6 \\ y=+3a-6 \end{cases}$ $\quad \begin{cases} y>2 \\ 3a+6>2 \\ 3a+6<3 \end{cases}$ $\quad \begin{cases} y<3 \quad 3a-6>2 \\ 3a-6<3 \end{cases}$

1) $-3a+6>2$; $-3a>-4$; $a>+\frac{4}{3}$ $\quad$ $-3a+6<3$; $-3a<-3$; $a<1$ $\quad \begin{cases} a>\frac{4}{3} \\ a<1 \end{cases}$ – нет решений

2) $+3a-6>2$; $3a>8$; $a>\frac{8}{3}$ $\quad$ $3a-6<3$; $3a<9$; $a<3$ $\quad \begin{cases} a>\frac{8}{3} \\ a<3 \end{cases}$

Ответ: $a\in(\frac{8}{3};3)$

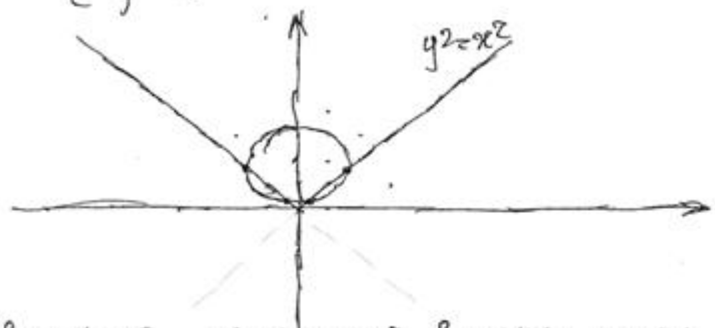
Задание №18

$\begin{cases} x^2+y^2-6(a-2)x-2ay+10a^2-36a+32=0 \\ y^2=x^2 \end{cases}$

$x^2+y^2-6(a-2)x-2ay+10a^2-36a+32=(y-a)^2+(x-3(a-2))^2-4$

$(y-a)^2+(x-3(a-2))^2=4$ – уравнение окружности с $R=2$

$y^2=x^2 \Rightarrow \begin{cases} y=-x \\ y=x \end{cases}$



центр окр.

Если вершина находится в точке (0;2), то решений 3, а если (0;3), то 2. => каждая половина окружности должна пересекать прямую $y=-x$ или $y=x$ в 2 точках, а т.к. центры (0;2) и (0;3) окружности ~~они~~ являются крайними точками =>

$x=0,\ y\in(2;3) \Rightarrow (y-a)\in(2;3)$ ∴ $x-3(a-2)=0$

$x=3a-6$ $\begin{cases} y=-3a+6 \\ y=+3a-6 \end{cases}$ $\begin{cases} y>2 \\ 3a+6>2 \\ 3a+6<3 \end{cases}$ $\begin{cases} y<3 \quad 3a-6>2 \\ 3a-6<3 \end{cases}$

1) $-3a+6>2$; $-3a>-4$; $a>+\frac{4}{3}$ $-3a+6<3$; $-3a<-3$; $a<1$ $\begin{cases} a>\frac{4}{3} \\ a<1 \end{cases}$ – нет решений

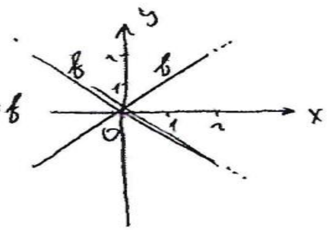
2) $+3a-6>2$; $3a>8$; $a>\frac{8}{3}$ $3a-6<3$; $3a<9$; $a<3$ $\begin{cases} a>\frac{8}{3} \\ a<3 \end{cases}$

Ответ: $a\in(\frac{8}{3};3)$

Задание №18

$$\begin{cases} x^2+y^2+2(a-3)x-4ay+5a^2-6a=0 \\ y^2=x^2 \end{cases}$$

$y^2=x^2 \Rightarrow y^2-x^2=0 \Rightarrow (y-x)(y+x)=0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} y=-x \\ y=x \end{array}\right.$, график уравнения



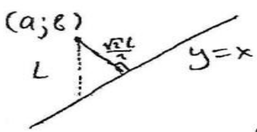
$x^2+y^2+2(a-3)x+4ay+5a^2-6a = x^2+2\cdot x\cdot(a-3)+(a-3)^2+y^2-4ay+4a^2-9 =$

$=(x+(a-3))^2+(y-2a)^2-9=0$

$(x+(a-3))^2+(y-2a)^2=9$ график – окружность радиуса 3 с центром в т. $(3-a; 2a)$

Каждую прямую окр. может пересечь не более 2-х раз $\Rightarrow$ при 4-х решениях

Каждая прямая дважды пересекает окр $\Rightarrow$ расст от $(3-a;2a)$ до $(y=x)$ меньше трёх, и расст. от $(3-a;2a)$ до $(y=x)$ меньше трёх



$\Rightarrow$ расст до $(y=x)$ равно $\frac{\sqrt2}{2}|a-b|$, аналогично расст до $(y=-x)$ равно $\frac{\sqrt2}{2}|a+b|$

$$\begin{cases} |a-b| < \frac{6}{\sqrt2} \\ |a+b| < \frac{6}{\sqrt2} \end{cases} \Rightarrow 4 \text{ решения}$$

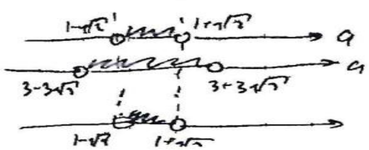
$a=3-a$, $b=2a$

$$\begin{cases} |3-3a| < \frac{6}{\sqrt2} \\ |3+a| < \frac{6}{\sqrt2} \end{cases}$$

$|3-3a| = 3|1-a| = \cancel{\left[\begin{array}{l} 3-3a \text{ при } a<1 \\ 3a-3 \text{ при } a \end{array}\right.} < \frac{6}{\sqrt2} \Rightarrow |1-a| < \sqrt2 \Rightarrow a\in(1-\sqrt2; 1+\sqrt2)$

$|3+a| < 3\sqrt2 \Rightarrow a\in(3-3\sqrt2; 3+3\sqrt2)$

$3(1-\sqrt2) < 1-\sqrt2$ $3(1+\sqrt2) > 1+\sqrt2$



Ответ: $a\in(1-\sqrt2; 1+\sqrt2)$.

Задание №18

18. $\begin{cases} x^2+y^2-2(a-4)x+6ay+10a^2-8a=0 \quad (1) \\ x^2=y^2 \quad (2). \end{cases}$

(2): $y^2=x^2$, значит либо $y=x$, либо $y=-x$. Чтобы решений системы было 4, дискриминант уравнения (1) должен быть положительным для каждого случая:

(1): $x^2+x^2-2(a-4)x+6ax+10a^2-8a=0.$

$2x^2+x(6a-2a+8)+(10a^2-8a)=0 \,|:2$

$x^2+x(2a+4)+5a^2-4a=0.$

$D=4a^2+16a+16-20a^2+16a=32a+16-16a^2.$

$D>0$

$-16a^2+32a+16>0 \,|:(-16)$

$a^2-2a-1<0$

$a^2-2a-1=0,\ D=4+4=8,\ \sqrt{D}=2\sqrt{2},\ a_{12}=1\pm\sqrt{2}.$

$a\in(1-\sqrt{2};\ 1+\sqrt{2})$

$2x^2-2(a-4)x-6ax+10a^2-8a=0$

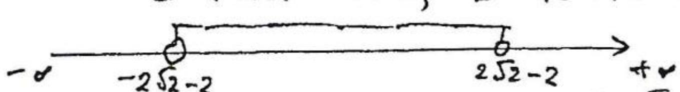
$2x^2-x(2a-8+6a)+10a^2-8a=0$

$x^2-x(4a-4)+5a^2-4a=0.$

$D=16a^2-32a+16-20a^2+16a=-4a^2-16a+16,\ D>0$

$a^2+4a-4<0$

$a^2+4a-4=0,\ D=16+16=32,\ \sqrt{D}=4\sqrt{2},\ a_{12}=\pm2\sqrt{2}-2.$



$a\in(-2\sqrt{2}-2;\ 2\sqrt{2}-2)$

$\sqrt{2}\approx1,4,\quad -2\sqrt{2}-2<1-\sqrt{2}<2\sqrt{2}-2<1+\sqrt{2}$

$a\in(1-\sqrt{2};\ 2\sqrt{2}-2)$ Ответ: $1-\sqrt{2};\ 2\sqrt{2}-2).$

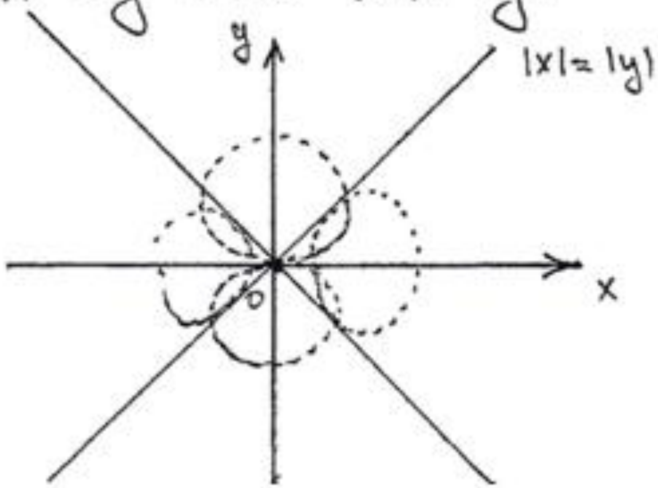
Задание №18

$$\begin{cases} x^2+y^2-6(a-2)x-2ay+10a^2-36a+32=0 \\ x^2=y^2 \end{cases}$$ 4 решения.

$$(x^2-2\cdot 3(a-2)x+9(a-2)^2)+(y^2-2ay+a^2)-4=0.$$

$$(x-3(a-2))^2+(y-a)^2=4$$ – окружность радиусом 2 и центром в т. $(3(a-2);\ a)$

$$x^2=y^2 \iff |x|=|y|$$



4 решения будут в случае, если окружность не будет касаться графиков и не будет проходить через т. $(0;0)$.

Задание №18

- неверное понимание условия задачи;
- неверное определение вида кривых по их уравнениям;
- неумение строить графики;
- ошибки в понимании логики анализа задачи;
- неумение делать необходимые обоснования.