Анализ результатов итоговой аттестации по математике в 2020 году

Профильный ЕГЭ по математике

В 2020 году проводился для выпускников и абитуриентов, планировавших поступать в ВУЗы.

Отводится 3 часа 55 минут (235 минут).

КИМ содержат 19 заданий:

№1-12 – по 1 баллу; № 13-15 – по 2; №16-17 – по 3; №18-19 – по 4 (максимум – 32 балла).

Результаты переводятся в стобалльную шкалу и могут быть представлены абитуриентом на конкурс для поступления в ВУЗ.

Профильный ЕГЭ по математике

Шкала перевода первичных баллов в тестовые выглядит следующим образом:

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
2019-2020	5	9	14	18	23	27	33	39	45	50	56	62	68	70	72	74	76

	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32
2019-2020	78	80	82	84	86	88	90	92	94	96	98	99	100	100	100

Количество участников ЕГЭ по математике в Кемеровской области

	2019	2020
Математика профильная	**5614**	**5545**

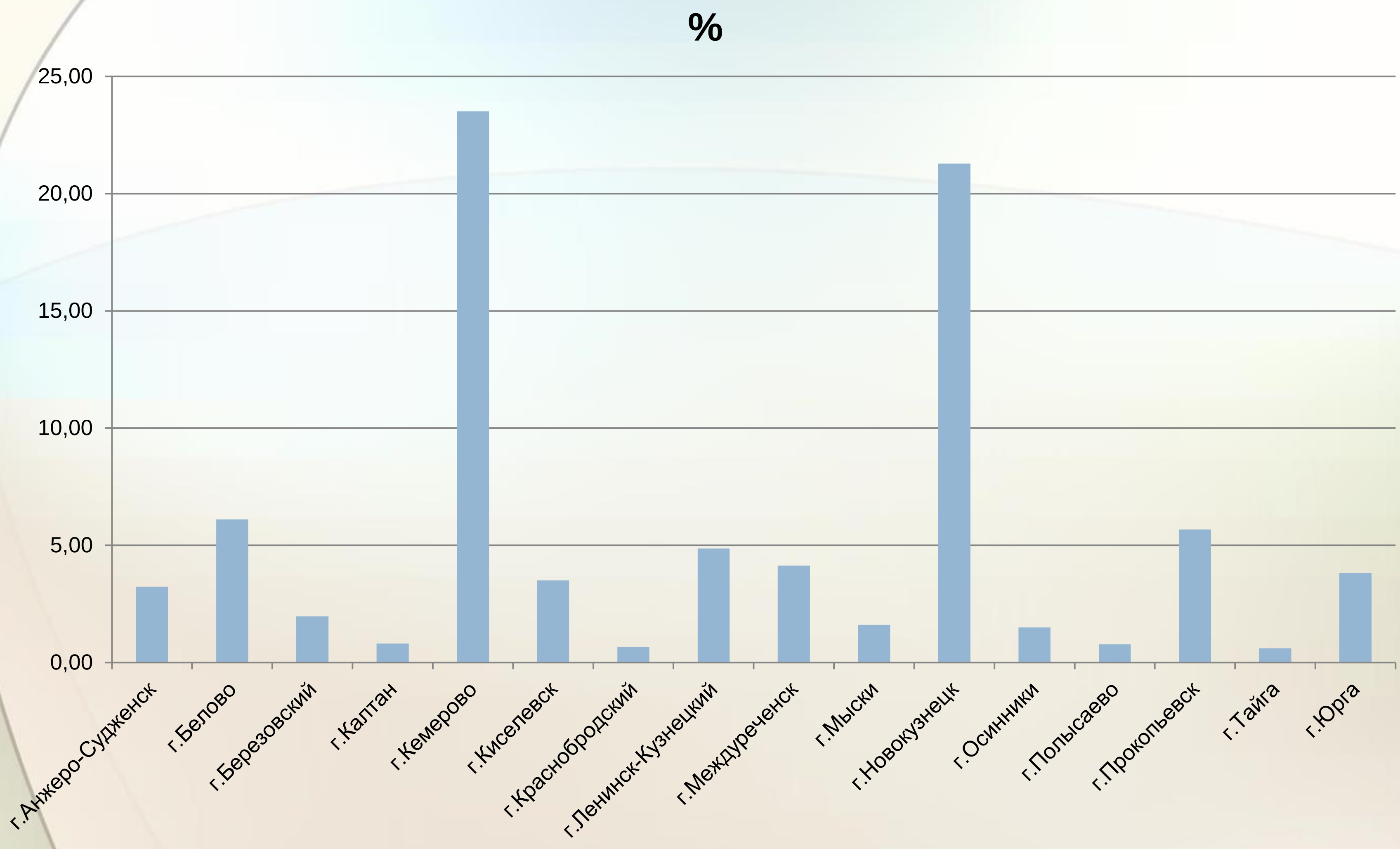
Участники ЕГЭ по математике по категориям

Учебный предмет	Категории участников	% 2019	% 2020
Математика профильная	Выпускники текущего года (СОО)	**98,54**	**95,92**
	Выпускники текущего года (СПО)	**1,45**	**0,92**
	Выпускники прошлых лет		**3,12**
	Участники с ОВЗ	**0,45**	**0,70**

Участники ЕГЭ по математике по типам ОО

Учебный предмет	Тип ОО	% 2019	% 2020
Математика профильная	Лицеи	**15,52**	**14,23**
	Гимназии	**11,23**	**11,27**
	СОШсУИОП	**5,55**	**5,77**
	СОШ	**63,29**	**60,05**
	ГОО	**2,74**	**3,68**
	СПО	**0,21**	**0,16**

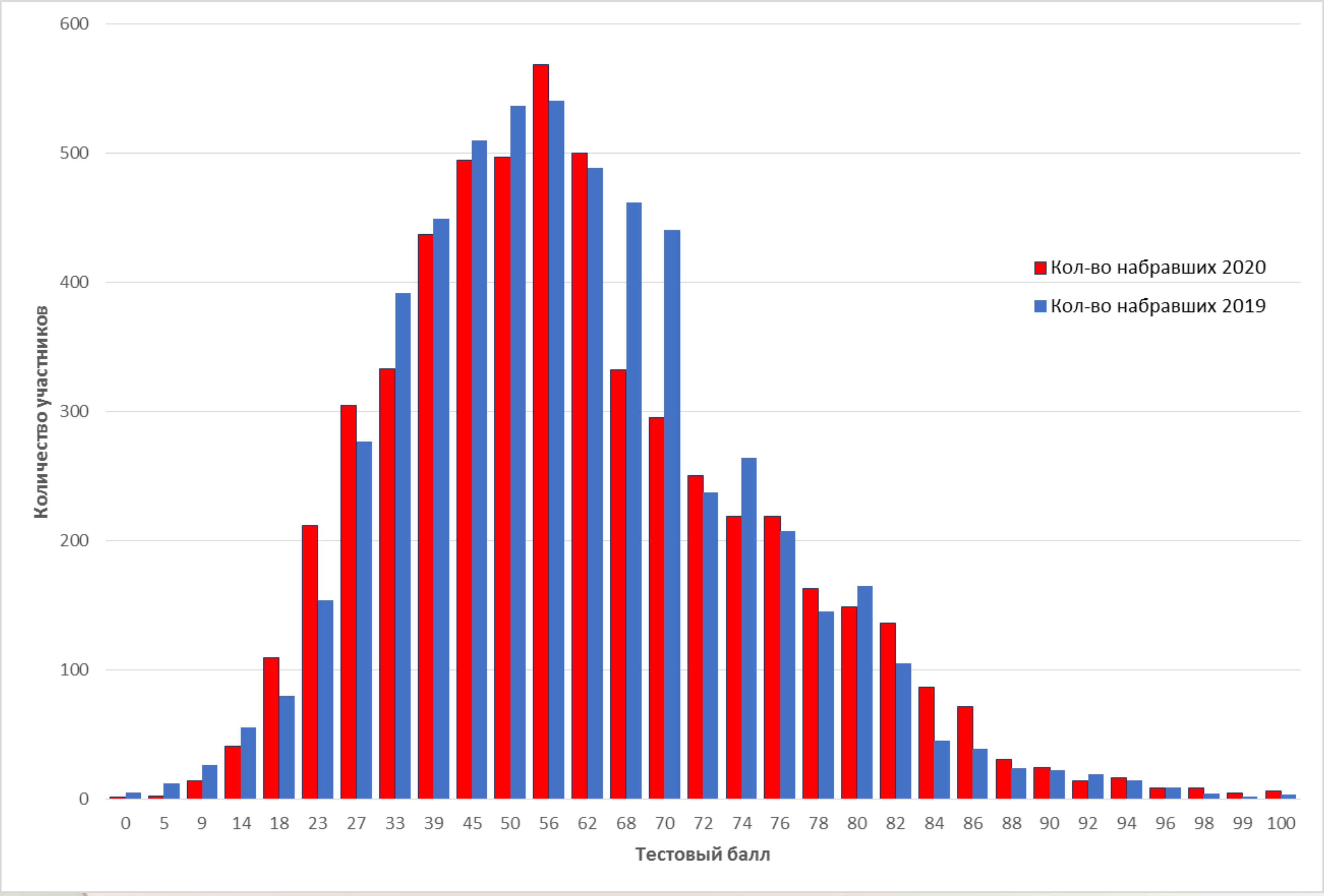
Участники ЕГЭ по математике по АТЕ



Результаты ЕГЭ по профильной математике

Результат		2019 г.	2020 г.
Число участников, чел.		**5614**	**5545**
Не преодолели минимального балла, %		**5,79**	**6,92**
Средний балл	по Кузбассу	**55,49**	**55,34**
	по России	**56,5**	**54,2**
Получили от 81 до 99 баллов, %		**4,94**	**7,16**
Получили 100 баллов, чел.		**3**	**6**

Распределение тестовых баллов по профильной математике



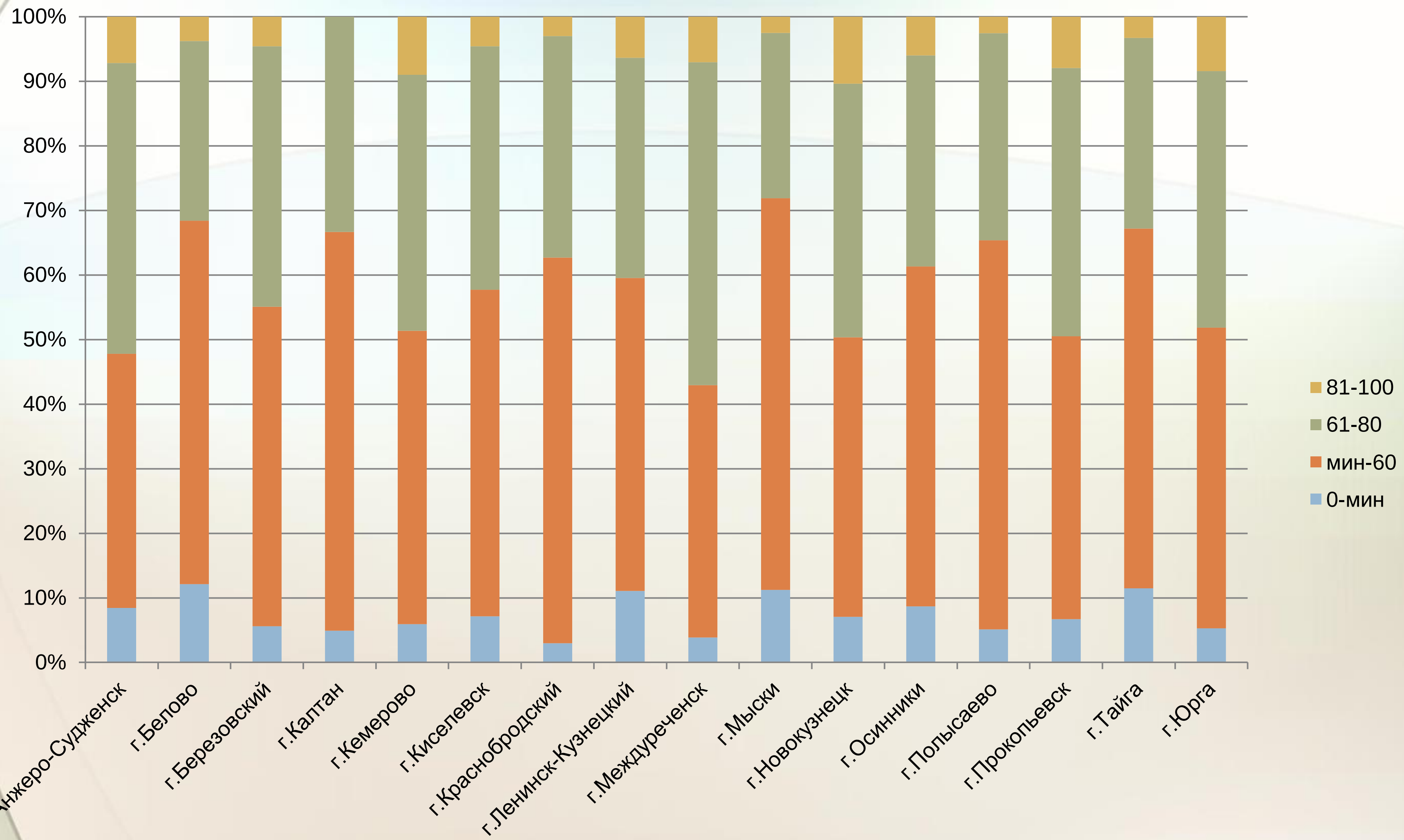
Результаты участников ЕГЭ по математике по категориям

	Выпускники текущего года (СОО)	Выпускники текущего года (СПО)	Выпускники прошлых лет	Участники с ОВЗ
Кол-во набравших балл ниже минимального	**312**	**23**	**44**	**3**
Кол-во от минимального балла до 60 баллов	**2525**	**24**	**85**	**11**
Кол-во от 61 до 80 баллов	**2085**	**4**	**38**	**22**
Кол-во от 81 до 99 баллов	**391**	**0**	**6**	**3**
Кол-во участников, получивших 100 баллов	**6**	**0**	**0**	**0**

Результаты участников ЕГЭ по математике по типам ОО

	Доля участников, получивших тестовый балл				**Кол-во 100 баллов**
	ниже min	от min до 60	от 61 до 80	от 81 до 99	
Лицеи	**0,61**	**4,22**	**6,74**	**2,63**	**3**
Гимназии	**0,5**	**4,18**	**5,41**	**1,15**	**1**
СОШсУИОП	**0,22**	**2,45**	**2,52**	**0,58**	**0**
СОШ	**4,13**	**32,41**	**21,28**	**2,24**	**1**
ГОО	**0,13**	**2,04**	**2,24**	**0,13**	**1**
СПО	**0,45**	**0,47**	**0,14**	**0**	**0**
ВПЛ	**0,79**	**1,77**	**0,88**	**0,43**	**0**

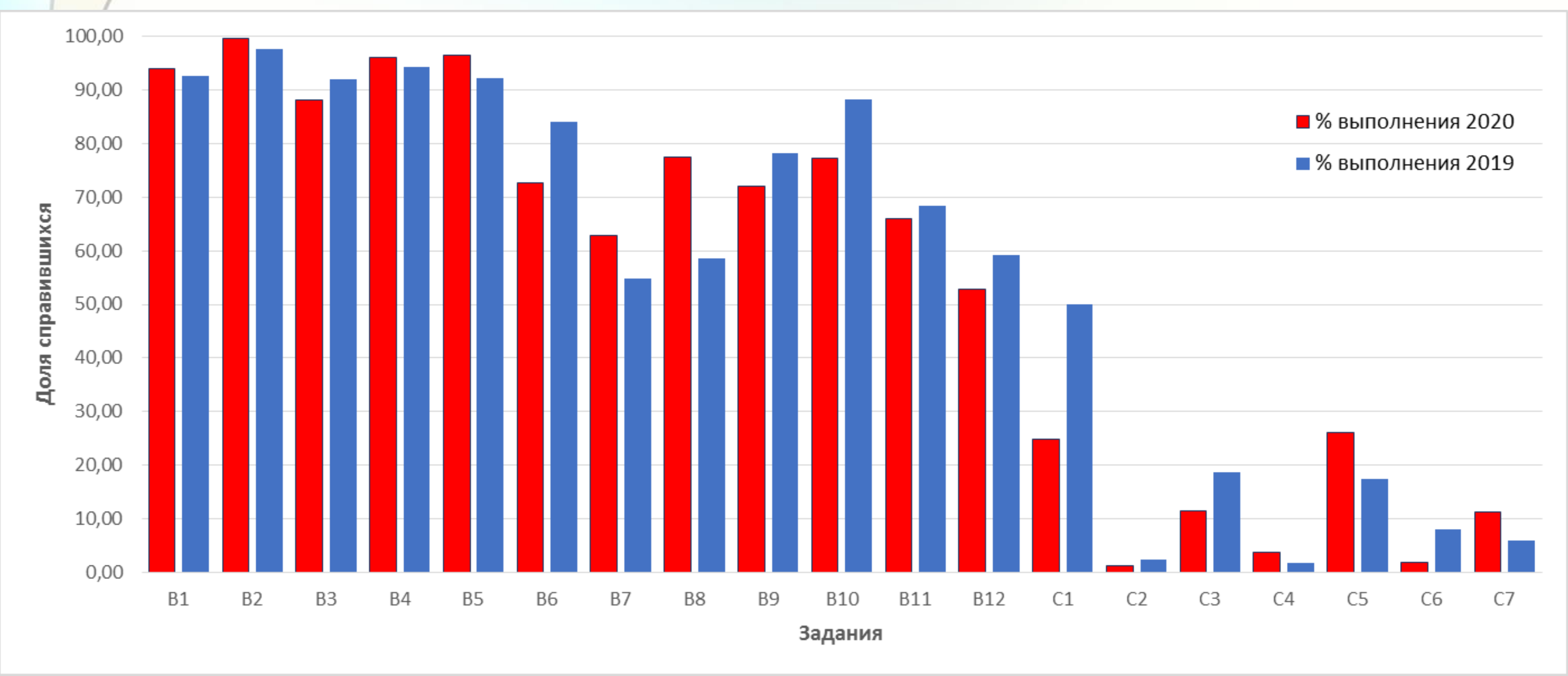
Результаты участников ЕГЭ по математике по АТЕ



ОО, подготовившие выпускников, получивших 100 баллов

ОО, территория	2019	2020
Лицей №11, г. Новокузнецк	**1**	
Лицей №84 имени В.А. Власова, г. Новокузнецк	**1**	**1**
Губернаторский многопрофильный лицей-интернат, г. Кемерово (ГОО)	**1**	**1**
Средняя общеобразовательная школа №12, г. Анжеро-Судженск		**1**
Лицей №23, г. Кемерово		**1**
Лицей №20, г. Междуреченск		**1**
Гимназия №32, г. Новокузнецк		**1**

Процент выполнения заданий по профильной математике



Профильный ЕГЭ по математике

Практико-ориентированный модуль

Тип задания: задание на применение приобретенных знаний и умений в практической деятельности и повседневной жизни.

№ 1 – простейшая текстовая задача с округлением;
№ 2 – чтение диаграмм;
№ 4 – нахождение вероятности события;
№ 10 – текстовая задача с прикладным содержанием;
№ 17 – задача с экономическим содержанием.

Профильный ЕГЭ. Задание 1

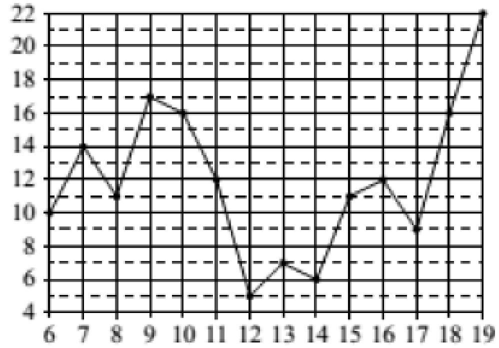
2019. В пачке 500 листов бумаги формата А4. За неделю в офисе расходуется 600 листов. Какого наименьшего количества пачек бумаги хватит на 3 недели?

2020. В доме, в котором живет Гриша, один подъезд. На каждом этаже находится по пять квартир. Гриша живет в квартире №43. На каком этаже живет Гриша?

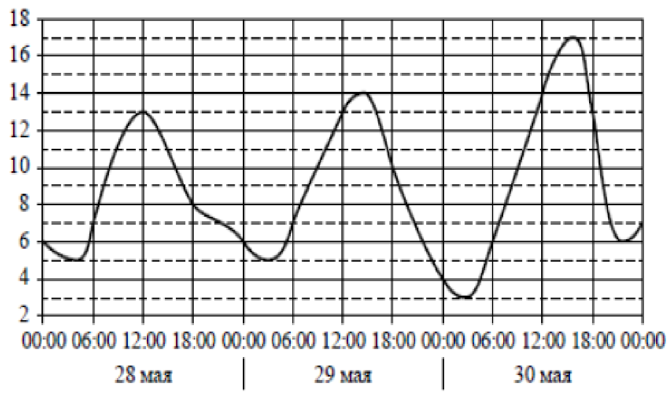
2019 год	2020 год
92,6%	94,05%

Профильный ЕГЭ. Задание 2

2019. На рисунке жирными точками показана среднесуточная температура воздуха в Архангельске с 6 по 19 июня 1965 года. По горизонтали указываются числа месяца, по вертикали – температура в градусах Цельсия. Для наглядности жирные точки на рисунке соединены линией. Определите по рисунку наибольшую среднесуточную температуру в Архангельске за данный период. Ответ дайте в градусах Цельсия.



2020. На рисунке показано изменение температуры воздуха на протяжении трех суток. По горизонтали указываются дата и время, по вертикали — значение температуры в градусах Цельсия. Для наглядности жирные точки на рисунке соединены линией. Определите по рисунку наибольшую температуру воздуха 29 мая. Ответ дайте в градусах Цельсия.



2019 год	2020 год
97,77%	99,59%

Профильный ЕГЭ. Задание 4

2019. Фабрика выпускает сумки. В среднем, 9 сумок из 300 имеют скрытые дефекты. Найдите вероятность того, что купленная сумка окажется без дефектов.

2020. В чемпионате по гимнастике участвуют 50 спортсменок: 13 из Великобритании, 7 из Франции, остальные — из Германии. Порядок, в котором выступают гимнастки, определяется жребием. Найдите вероятность того, что спортсменка, выступающая первой, окажется из Германии.

2019 год	2020 год
94,43%	96,09%

Профильный ЕГЭ. Задание 10

2019. Сила тока I (в А) в электросети вычисляется по закону Ома: $I = U / R$, где U – напряжение электросети (в В), R – сопротивление подключаемого
электроприбора (в Ом). Электросеть прекращает работать, если сила тока превышает 8,8А. Определите, какое наименьшее сопротивление может быть у электроприбора, подключаемого к электросети с напряжением 220В, чтобы электросеть продолжала работать. Ответ дайте в омах.

2020. В ходе распада радиоактивного изотопа его масса m (в мг) уменьшается по закону $m = m_0 2^{-T/\tau}$, где m_0 — начальная масса изотопа (в мг), τ — время, прошедшее от начального момента, в минутах, T — период полураспада в минутах. В начальный момент времени масса изотопа 156 мг. Период его полураспада составляет 8 минут. Найдите, через сколько минут масса изотопа будет равна 39 мг.

2019 год	2020 год
88,24%	77,26%

Профильный ЕГЭ. Задание 17

2019

В июле планируется взять кредит в банке на сумму 28 млн рублей на некоторый срок (целое число лет). Условия его возврата таковы:
— каждый январь долг возрастает на 25% по сравнению с концом предыдущего года;
— с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить часть долга;
— в июле каждого года долг должен быть на одну и ту же сумму меньше долга на июль предыдущего года.
Чему будет равна общая сумма выплат после полного погашения кредита, если наибольший годовой платёж составит 9 млн рублей?
(Считайте, что округления при вычислении платежей не производятся.)

2020

В июле 2026 года Иванов планирует взять кредит на пять лет в размере 1050 тыс. рублей. Условия его возврата таковы:
— каждый январь долг возрастает на 10% по сравнению с концом предыдущего года;
— с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить одним платежом часть долга;
— в июле 2027, 2028 и 2029 годов долг остаётся равным 1050 тыс. рублей;
— выплаты в 2030 и 2031 годах равны;
— к июлю 2031 года долг будет выплачен полностью.
На сколько рублей последняя выплата будет больше первой?

2019	2020
17,42%	29,05%

Профильный ЕГЭ. Задание 17

досрочный

В июле планируется взять кредит в банке на сумму 5 млн рублей на некоторый срок (целое число лет). Условия его возврата таковы:

— каждый январь долг возрастает на 20% по сравнению с концом предыдущего года;

— с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить часть долга;

— в июле каждого года долг должен быть на одну и ту же сумму меньше долга на июль предыдущего года.

На сколько лет планируется взять кредит, если известно, что общая сумма выплат после его полного погашения составит 7,5 млн рублей?

резерв

Пенсионный фонд владеет ценными бумагами, которые стоят $10t$ тыс. рублей в конце года t $(t = 1; 2; \dots)$. В конце любого года пенсионный фонд может продать ценные бумаги и положить деньги на счёт в банке, при этом в конце каждого следующего года сумма на счёте будет увеличиваться в $1+r$ раз. Пенсионный фонд хочет продать ценные бумаги в конце такого года, чтобы в конце тридцатого года сумма на его счёте была наибольшей. Расчёты показали, что для этого ценные бумаги нужно продавать строго в конце шестого года. При каких положительных значениях r это возможно?

Профильный ЕГЭ. Задание 17

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	3
Верно построена математическая модель, решение сведено к исследованию этой модели и получен результат: — неверный ответ из-за вычислительной ошибки; — верный ответ, но решение недостаточно обосновано	2
Верно построена математическая модель, решение сведено к исследованию этой модели, при этом решение может быть не завершено	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

	1 балл	*2 балла*	*3 балла*
2019 год	**1,68%**	**2,9%**	**12,85%**
2020 год	**2,36%**	**4,4%**	**22,29%**

Профильный ЕГЭ. Задание 17

	Долг	~~Выпла~~ Долг с %	Выплата
2027	880 т.р.	$1{,}2\cdot 880$	$0{,}2\cdot 880$
2028	880	$1{,}2\cdot 880$	$0{,}2\cdot 880$
2029	880	$1{,}2\cdot 880$	$0{,}2\cdot 880$
2030	880	$1{,}2\cdot 880$	x
2031	$880-x$	$1{,}2\cdot(880-x)$	x

Пусть x – выплата в 2030 и 2031 гг.

Из последней выплаты следует, что

$$1{,}2\cdot(880-x)=x$$
$$2{,}2x=12\cdot 88$$
$$x=480 \text{ т.р.}$$

Самая первая выплата $=0{,}2\cdot 880=88\cdot 2=176$ т.р.

Тогда последняя выплата больше первой на:

$$480-176=304 \text{ т.р.}$$

Ответ: на 304 000 руб.

неверно построена модель
(долг на начало 2031 года должен быть $1{,}2\times 880-x$)

Профильный ЕГЭ. Задание 17

неверное понимание условия задачи

Пусть начальная сумма равна S,

Составим схему:

$S \to 1{,}2S \to S \to 1{,}2S \to S \to 1{,}2S \to S \to 1{,}2S \to \frac{1}{2}S \to 0{,}6S \to 0$

Первая выплата – $1{,}2S - S = 0{,}2S$

Последняя выплата – $0{,}6S$

Тогда их разница – $0{,}6S - 0{,}2S = 0{,}4S$.

$0{,}4S = 0{,}4 \cdot 880 = 352$

Ответ: Последняя выплата больше первой на 352 тыс. рублей.

неверно построена модель
(должны быть равны последние две выплаты,
а не погашаемые части долга)

Профильный ЕГЭ. Задание 17

использование готовых формул без вывода

$S = 880\,000$ руб.

$n = 5$ лет

$r = 20\%$

$k = 1 + \frac{r}{100} = 1 + 0{,}2 = 1{,}2$

$x =$ выплата

1. Найдем выплату в 2027 и 2028, и 2029 годах

$$S \cdot k^n - x \cdot \frac{k^n - 1}{k - 1} = 0$$

$$880 \cdot 1{,}2^3 - x \cdot \frac{1{,}2^3 - 1}{1{,}2 - 1} = 880 \Rightarrow x \frac{1{,}2^3 - 1}{1{,}2 - 1} = 880(1{,}2^3 - 1) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{880\,\cancel{(1{,}2^3 - 1)} \cdot (1{,}2 - 1)}{\cancel{(1{,}2^3 - 1)}} = 880 \cdot \frac{12}{10} - 880 = 1056 - 880 = 176$$

2. Найдем выплату в 2030 и 2031

$$S \cdot k^n - x \cdot \frac{k^n - 1}{k - 1} = 0$$

$$880 \cdot 1{,}2^2 - x \cdot \frac{1{,}2^2 - 1}{1{,}2 - 1} = 0 \Rightarrow x = \frac{880 \cdot 1{,}2^2 \cdot \cancel{(1{,}2 - 1)}}{\cancel{(1{,}2 - 1)}(1{,}2 + 1)} =$$

$$= \frac{880 \cdot \left(\frac{12}{10}\right)^2}{\frac{12}{10} + 1} = \frac{880 \cdot \frac{144}{100} \cdot 10}{22} = 576\,000$$

$576\,000 - 176\,000 = 400\,000$ разница между I и последней

Ответ: 400000

Профильный ЕГЭ. Задание 17

(17) Пусть S – сумма кредита, S_1 – первая выплата; S_5 – последняя выплата; d – часть долга (с 2030 по 2031 гг); n – кол-во лет; март – месяц выплаты долга.

S = 540 тысяч рублей $k = 1 + \frac{r}{100} = 1,25$

Составим таблицу

Дата	Сумма долга
26. июль	S
27 { янв. / март	1,25S ⇒ общ. выплата 1,25S − 0,25S
28 { янв / март	1,25S ⇒ общ. выплата 1,25S − 0,25S
29 { янв / март	1,25S ⇒ общ. выплата 1,25S − 0,25S
30 { янв / март	1,25S ⇒ общ. выплата 1,25S − d
31 { янв / март	(1,25S − d)1,25 ⇒ общ. выплата (1,25S − d)1,25 − d = 0

вычислительные ошибки

$S_1 = \cancel{1,25\cdot540} - 0,25\cdot540 = 135$ тыс. рублей

$S_5 = \cancel{k}d$

$(1,25S - d)1,25 - d = 0$; $1,25^2S - 1,25d - d = 0$; $1,5625\cdot540 - 0,09d = 0$

$d = 6,25\cdot540 = 375$ тысяч рублей ⇒

$S_5 = \cancel{1,25}\cdot375$ тысяч рублей
375 240

$S_5 - S_1 = \cancel{...} - 135 = \cancel{615}$ тысяч рублей.
240

Ответ: ~~615~~ тысяч рублей

Профильный ЕГЭ по математике

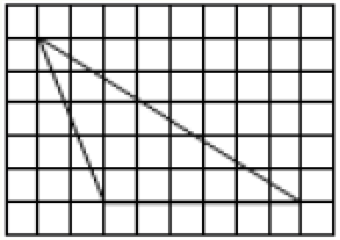
Геометрические задачи

Уметь выполнять действия с геометрическими фигурами, координатами и векторами

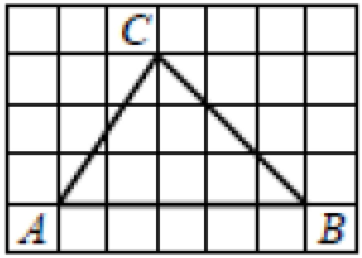
№ 3 – геометрия на клетчатой бумаге;
№ 6, 16 – задачи по планиметрии;
№ 8, 14 – задачи по стереометрии.

Профильный ЕГЭ. Задание 3

2019. На клетчатой бумаге с размером клетки 1x1 изображен треугольник. Найдите его площадь.



2020. На клетчатой бумаге с размером клетки 1x1 изображен треугольник ABC. Найдите длину его средней линии, параллельной AB.

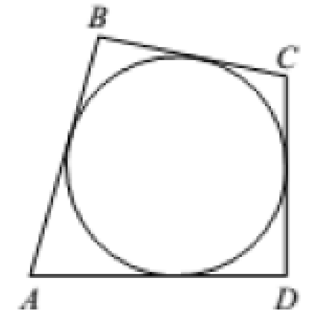


2019 год	2020 год
92,13%	88,12%

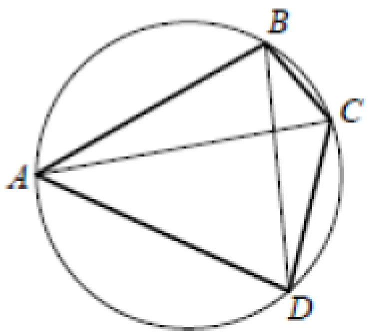
Профильный ЕГЭ. Задание 6

2019. В четырёхугольник ABCD, периметр которого равен 52, вписана окружность, AB=14. Найдите CD.

Тип задания: задание на нахождение геометрических величин (углов, площадей, длин).



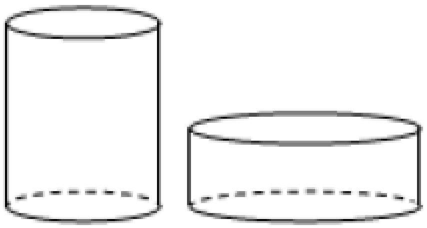
2020. Четырёхугольник ABCD вписан в окружность. Угол ABD равен 58° , угол CAD равен 39° . Найдите угол ABC . Ответ дайте в градусах.
Тип задания: задание на нахождение геометрических величин (углов, площадей, длин).



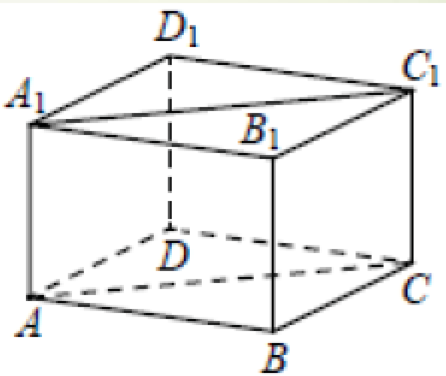
2019 год	2020 год
84,13%	72,8%

Профильный ЕГЭ. Задание 8

2019. Дано два цилиндра. Объём первого цилиндра равен 12. У второго цилиндра высота в 2 раза меньше, а радиус основания в 3 раза больше, чем у первого. Найдите объём второго цилиндра.



2020. В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ известно, что $AB=7$, $BC=6$, $AA_1=5$. Найдите объем многогранника, вершинами которого являются точки A, B, C, A_1, B_1, C_1.



2019 год	2020 год
58,63%	77,6%

Профильный ЕГЭ. Задание 14

2019

В правильной треугольной пирамиде $SABC$ сторона основания AB равна 7, а боковое ребро SA равно 6. На рёбрах AB и SC отмечены точки K и M соответственно, причём $AK : KB = SM : MC = 4:3$. Плоскость α содержит прямую KM и параллельна прямой SA.

а) Докажите, что сечение пирамиды $SABC$ плоскостью α — прямоугольник.

б) Найдите объём пирамиды, вершиной которой является точка A, а основанием — сечение пирамиды $SABC$ плоскостью α.

2020

В правильной треугольной пирамиде $SABC$ сторона основания AB равна 6, а боковое ребро SA равно 21 . На рёбрах AB и SB отмечены точки M и K соответственно, причём $AM = 4$, $SK : KB = 1:3$.

а) Докажите, что плоскость CKM перпендикулярна плоскости ABC .

б) Найдите объём пирамиды $BCKM$.

2019	2020
2,43%	1,72%

Профильный ЕГЭ. Задание 14

досрочный

В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$ сторона основания AB равна 4, а боковое ребро SA равно 7. На рёбрах CD и SC отмечены точки N и K соответственно, причём $DN : NC = SK : KC = 1:3$. Плоскость α содержит прямую KN и параллельна прямой BC.

а) Докажите, что плоскость α параллельна прямой SA.

б) Найдите угол между плоскостями α и SBC.

резерв

В тетраэдре $ABCD$ длина ребра AD равна 4, а длины остальных рёбер равны 6.

а) Докажите, что прямые AD и BC перпендикулярны.

б) Найдите площадь сечения тетраэдра плоскостью, содержащей прямую BC и перпендикулярной прямой AD.

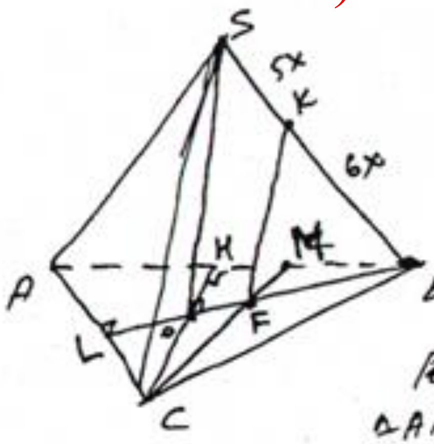
Профильный ЕГЭ. Задание 14

Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а* и обоснованно получен верный ответ в пункте *б*	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а* ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте *б*, возможно, с использованием утверждения пункта *а*, при этом пункт *а* не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

	1 балл	*2 балла*
2019 год	2,15%	0,28%
2020 год	1,05%	0,67%

Профильный ЕГЭ. Задание 14

неправильное применение теорем планиметрии (в частности – теоремы Менелая)



Дано: SABC-прав. пирамида; $AB = 9$; $SA = \sqrt{43}$.
$AM = 7$; $SK : KB = 5 : 6$.
Доказать: $(CKM) \perp (ABC)$
Найти: V_{BCKM}.

Решение: CH и BL - высоты в △ABC.
CM пересек. BL в точке F.
Т.к. $AM = 7 \Rightarrow MB = 2$; BL - медиана, т.к.
△ABC-равностор. $\Rightarrow LC = AC$; Пусть $BF = y$; $MB = AB - AM = 2$

Т. Менелая: $\frac{BF}{FL} \cdot \frac{LC}{CA} \cdot \frac{AM}{MB} = 1$; $\frac{y}{FL} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{7}{2} = 1 \Rightarrow FL = \frac{7}{4}y \Rightarrow$

$BL = LF + FB = \frac{7}{4}y + y = \frac{11y}{4}$. O - центр △ABC, тогда

$\frac{BO}{OL} = \frac{2}{1}$, т.к. BL - медиана. $OL = z$, тогда $BO = 2z \Rightarrow$

$BL = 3z = \frac{11y}{4} \Rightarrow z = \frac{11y}{12} \Rightarrow OF = \frac{7y}{4} - \frac{11y}{12} = \frac{10y}{12} = \frac{5y}{6} \Rightarrow$

$(OF = LF - LO)$ В плоскости (SOB):

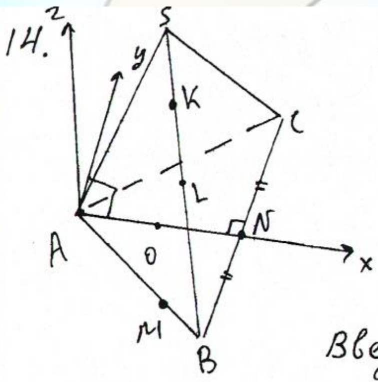
$\frac{OF}{FB} = \frac{5y}{6 \cdot y} = \frac{5}{6} = \frac{SK}{KB} \Rightarrow KF \parallel SO \Rightarrow$ если $SO \perp (ABC)$, то
т.к. O центр △ABC, S-вершина
$KF \perp (ABC) \Rightarrow$ т.к. (CKM) содержит KF, то $(CKM) \perp (ABC)$ чтд

неверное использование признака перпендикулярности плоскостей

Профильный ЕГЭ. Задание 14

неправильное определение координат необходимых точек при использовании координатного метода

14.



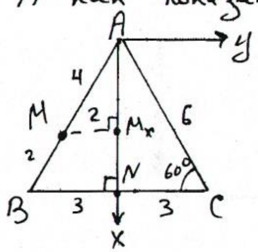
Дано: $SABC$ – пр. тр. пир., $AB = 6$, $SA = \sqrt{21}$, $M \in AB$, $K \in SB$, $AM = 4$, $SK : KB = 1 : 3$.

а) Доказать: $(CKM) \perp (ABC)$

Доказательство:

N – середина BC, тогда $AN \perp BC$.

Введём систему координат с центром в точке A как показано на рисунке. Рассмотрим основание пирамиды.



$CN = BN = \frac{6}{2} = 3$;

$AN = AC \cdot \sin 60^\circ = 6 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3}$.

$C(3\sqrt{3}; 3; 0)$ $\quad M(2\sqrt{3}; -2; 0)$

$\triangle AM_xM \sim \triangle ANB$ ($\angle MAM_x$ – общий; $\angle AM_xM = \angle ANB = 90^\circ$; по двум углам), $\frac{AM_x}{AN} = \frac{AM}{AB} \Rightarrow AM_x = \frac{4}{6} \cdot 3\sqrt{3} = 2\sqrt{3}$; $MM_x = \sqrt{16-12} = 2$.

Пусть O – центр основания пирамиды, тогда $AO = \frac{2}{3}AN = 2\sqrt{3}$ (по свойству точки пересечения медиан треугольника, в $\triangle ABC$).

В $\triangle SAO$ по теореме Пифагора $SA^2 = SO^2 + AO^2 \Rightarrow SO = \sqrt{21-12} = 3$.

$S(2\sqrt{3}; 0; 3)$ $\quad B(3\sqrt{3}; -3; 0)$. Введём вспомогательную точку L – середину SB. $L = \left(\frac{3\sqrt{3}+2\sqrt{3}}{2}; \frac{0-3}{2}; \frac{3+0}{2}\right) = \left(\frac{5\sqrt{3}}{2}; -\frac{3}{2}; \frac{3}{2}\right)$ Тогда K – середина SL. $K = \left(\frac{2\sqrt{3}+\frac{5\sqrt{3}}{2}}{2}; \frac{0-\frac{3}{2}}{2}; \frac{3+\frac{3}{2}}{2}\right) = \left(\frac{9\sqrt{3}}{4}; -\frac{3}{4}; \frac{9}{4}\right)$.

Составим уравнение плоскости (CKM) в виде $Ax + By + Cz + D = 0$, по трём известным точкам:

$$\begin{cases} C: 3\sqrt{3}A + 3B + D = 0 \mid \cdot 2; \\ M: 2\sqrt{3}A - 2B + D = 0 \mid \cdot 3; \\ K: \frac{9\sqrt{3}}{4}A - \frac{3}{4}B + \frac{9}{4}C + D = 0 \mid \cdot 4; \end{cases} \qquad \begin{cases} 6\sqrt{3}A + 6B + 2D = 0; \\ 6\sqrt{3}A - 6B + 3D = 0; \\ 9\sqrt{3}A - 3B + 9C + 4D = 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} 12\sqrt{3}A + 5D = 0 & \Rightarrow A = \frac{-5D}{12\sqrt{3}} \\ 12B - D = 0 & \Rightarrow B = \frac{D}{12} \\ 9\sqrt{3}A - 3B + 9C + 4D = 0; \end{cases} \quad \frac{-5 \cdot 9\sqrt{3}}{12\sqrt{3}}D - \frac{3D}{12} + 9C + 4D = 0;$$

$\frac{-15}{4}D - \frac{1}{4}D + 9C + 4D = 0$; $9C = 0$; $C = 0$.

$\frac{-5D}{12\sqrt{3}}x + \frac{D}{12}y + D = 0 \mid :D$; $\quad \frac{-5}{12\sqrt{3}}x + \frac{1}{12}y + 1 = 0 \mid \cdot 12$;

$\frac{-5}{\sqrt{3}}x + y + 12 = 0$ – уравнение (CKM).

$\vec{n}_1 = \left\{-\frac{5}{\sqrt{3}}; 1; 0\right\}$ – вектор нормали к (CKM)

$\vec{n}_2 = \{0; 0; 1\}$ – вектор нормали к (ABC)

$\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = -\frac{5}{\sqrt{3}} \cdot 0 + 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 = 0 \Rightarrow \vec{n}_1 \perp \vec{n}_2 \Rightarrow (CKM) \perp (ABC)$.

ч.т.д.

Профильный ЕГЭ. Задание 14

неумение анализировать пространственные конфигурации

$(MKC): x - \frac{1}{2\sqrt{3}} y - 3 = 0$

$(ABC): z = 0$

$\vec{n}(MKC) \cdot \vec{n}(ABC) = 1 \cdot 0 + \left(-\frac{1}{2\sqrt{3}}\right) \cdot 0 + 1 \cdot 0 =$

$= 0$

$\Rightarrow (MKC) \perp (ABC)$

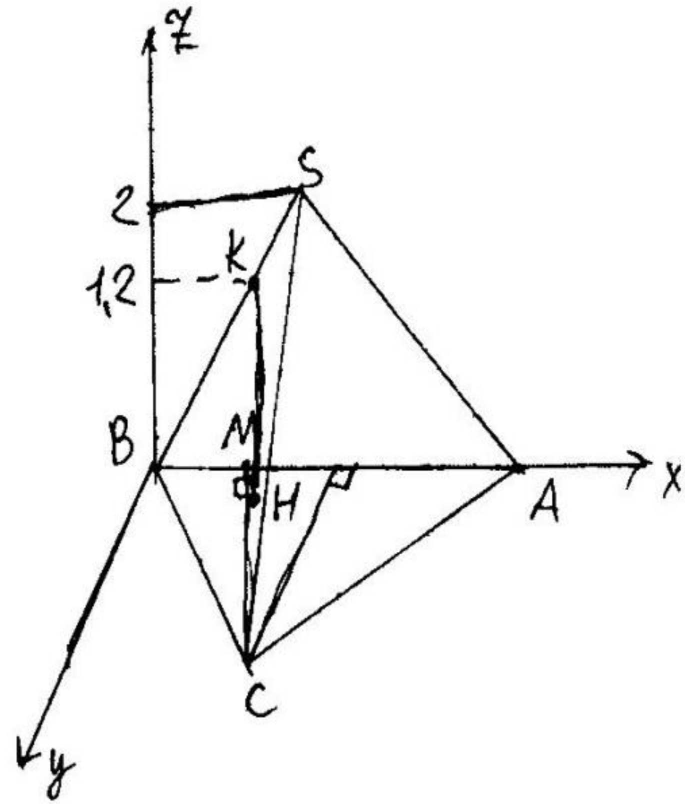
б) $V(BCMK) = S_{\triangle}(MBC) \cdot KH$

$S_{\triangle ABC} = 3 \cdot 6\sqrt{3} \cdot \frac{1}{2} = 9\sqrt{3}$

$KH = y(K) = 1{,}2$

$V(BCMK) = 1{,}2 \cdot 9\sqrt{3} = 10{,}8\sqrt{3}$

Ответ: $10{,}8\sqrt{3}$



незнание формулы для вычисления объема пирамиды

Профильный ЕГЭ. Задание 16

2019

Точка O — центр вписанной в треугольник ABC окружности. Прямая BO вторично пересекает описанную около этого треугольника окружность в точке P.

а) Докажите, что $\angle POA = \angle PAO$.

б) Найдите площадь треугольника APO, если радиус описанной около треугольника ABC окружности равен 8, $\angle BAC = 75°$, $\angle ABC = 60°$.

2020

В прямоугольном треугольнике ABC точка M лежит на катете AC , а точка N лежит на продолжении катета BC за точку C, причём $CM = BC$ и $CN = AC$.

а) Отрезки CP и CQ — медианы треугольников ABC и NCM соответственно. Докажите, что прямые CP и CQ перпендикулярны.

б) Прямые MN и AB пересекаются в точке K , а прямые BM и AN — в точке L. Найдите KL , если BC =1, а AC = 5.

2019	2020
1,66%	8,85%

Профильный ЕГЭ. Задание 16

досрочный

В треугольнике ABC угол A равен $120°$. Прямые, содержащие высоты BM и CN треугольника ABC, пересекаются в точке H. Точка O — центр окружности, описанной около треугольника ABC.

а) Докажите, что $AH = AO$.

б) Найдите площадь треугольника AHO, если $BC = \sqrt{15}$, $\angle ABC = 45°$.

резерв

Точка O — центр окружности, описанной около остроугольного треугольника ABC, I — центр вписанной в него окружности, H — точка пересечения высот. Известно, что $\angle BAC = \angle OBC + \angle OCB$.

а) Докажите, что точка H лежит на окружности, описанной около треугольника BOC.

б) Найдите угол OIH, если $\angle ABC = 40°$.

Профильный ЕГЭ. Задание 16

Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а* и обоснованно получен верный ответ в пункте *б*	3
Обоснованно получен верный ответ в пункте *б* ИЛИ имеется верное доказательство утверждения пункта *а* и при обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, ИЛИ при обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки, ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте *б* с использованием утверждения пункта *а*, при этом пункт *а* не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

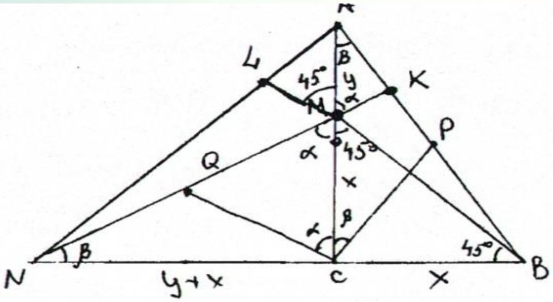
	1 балл	2 балла	3 балла
2019 год	0,94%	0,12%	0,59%
2020 год	7,54%	0,18%	1,13%

Профильный ЕГЭ. Задание 16

неверное понимание условия задачи

Дано:
$CM = BC$
$CN = AC$
Док-ть:
$CP \perp CQ$

Решение
~~обозначим $NC = MC + AM$~~
т.к. $\angle C = 90°$ и $MC = CB$ и $AC = NC$, то $\triangle AMC = \triangle CAB$
тогда пусть $\angle BAC = \beta$
тогда $\angle ACP = \beta$ т.к $\triangle APC$ равнобедр. N



$\angle \cancel{BAC} = \angle MNC$ из равных треуг. $\triangle AMC$ и $\triangle CAB$
$\angle \cancel{BAC}\ \angle MNC + \angle NMC = 180° - \angle C = 90°$
но $\angle NMC = \angle QCB$ т.к $\triangle QMC$ равнобедр
тогда $\angle QCM + \angle MCP = \angle MNC + \angle NMC = 90°$ ~~ч.т.д.~~
а сл-но $CP \perp CQ$ ч.т.д.

б) Дано.
$BC = 1$
$AC = 5$
Найти
KL - ?

Решение
~~$\sin\beta = \frac{MC}{NC} = \frac{CB}{AC} = \frac{1}{5}$~~ ~~$\sin\alpha = \sin(90-\beta) = \cos\beta$~~

Заметим, что $\angle AMK + \angle MAK = 90°$, а поэтому $\angle AKM = 90°$, а значит вокруг $ALMK$ можно описать окружн. и AM - диаметр. $AM = AC - MC = AC - CB = 4$

$$\sin\alpha = \frac{NC}{NM} = \frac{BC}{\sqrt{BC^2 + AC^2}} = \frac{1}{\sqrt{26}} = \frac{\sqrt{26}}{26} \qquad \cos\alpha = \sqrt{1 - \frac{1}{26}} = \frac{5}{\sqrt{26}}$$

по т. Пиф.: $NM = \sqrt{MC^2 + CN^2} = \sqrt{CB^2 + AC^2}$

$\angle LMK = \angle AMK + \angle LMA = \alpha + 45°$

$$\sin(45° + \alpha) = \sin 45° \cos\alpha + \cos 45° \cdot \sin\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{5}{\sqrt{26}} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{26}} =$$
$$= \frac{5}{2\sqrt{13}} + \frac{1}{2\sqrt{13}} = \frac{6}{2\sqrt{13}} = \frac{3}{\sqrt{13}}$$

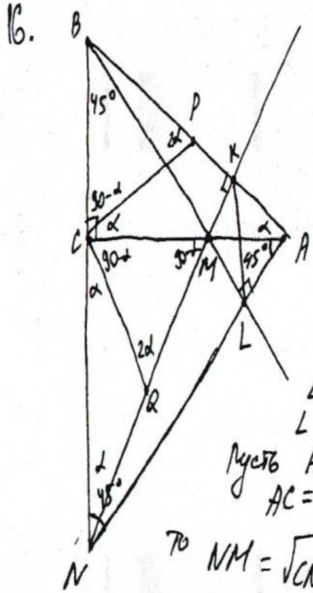
Тогда $\frac{LK}{\sin(45+\alpha)} = 2R = AM$

$LK = AM \cdot \sin(45 + \alpha) = 4 \cdot \frac{3}{\sqrt{13}} = \frac{12}{\sqrt{13}} = \frac{12}{13}\sqrt{13}$ Ответ: $LK = \frac{12}{13}\sqrt{13}$

Профильный ЕГЭ. Задание 16

неверное применение признаков подобия треугольников

16.



Дано: $\triangle ABC$-прямоуг.; $CM=BC$; $CN=AC$;
CP и CQ – медианы $\triangle ABC$ и $\triangle NCM$

а) Докажите: $CP \perp CQ$

б) Найти: KL, если MN пересек. AB в K, $BC=1$; $AC=3$, BM пересек AN в L

Решение:

а) Пусть $\angle PCA=\alpha$. Т.к. CP и CQ медианы $\triangle ABC$ и $\angle NCM$, то $BP=PC=PA$ и $CQ=QM=NQ \Rightarrow$ $\angle BAC=\angle PCA=\alpha$. $\angle BCP=90°-\alpha$, т.к. $\angle BCA=90° \Rightarrow$ $\angle PBC=90°-\alpha$ и $\angle BPC=2\alpha$.

Пусть $AB=2a \Rightarrow BP=PA=CP=a$, $BC=CM=2a\sin\alpha$ и $AC=CN=2a\cos\alpha$. Т.к. $\triangle NCM$-прямоуг. т.к. $AC\perp BC$, то $NM=\sqrt{CN^2+CM^2}=\sqrt{4a^2\cos^2\alpha+4a^2\sin^2\alpha}=\sqrt{4a^2}=2a \Rightarrow$

$CQ=QM=QN=\frac{1}{2}NM=a$. Рассмотрим $\triangle PBC$ и $\triangle QMC$:

$MC=BC=2a\sin\alpha$ и $CQ=QM=BP=PC=a \Rightarrow \triangle PBC=\triangle QMC \Rightarrow$

$\angle CQM=2\alpha$, $\angle QCM=\angle CMQ=\angle PBC=\angle BCP=90°-\alpha$, т.к. $\triangle BPC$ и $\triangle CQM$-равнобед. $\Rightarrow$ $\angle PCQ=\angle PCA+\angle ACQ=\alpha+90°-\alpha=90° \Rightarrow PC\perp CQ$ чтд

б) $\triangle ACN$-равнобед. и $\angle ACN=90° \Rightarrow \angle CNA=\angle CAN=45°$.

$\triangle BCM$-равнобед. и $\angle BCA=90° \Rightarrow \angle CBM=\angle BMC=45°$. В $\triangle NBL$
$\angle NBL=45°=\angle BML \Rightarrow \angle BLN=90°$. $\angle NCQ=90°-\angle ACQ=\alpha=\angle BNK$, т.к. $CQ=QN$.
$\angle NBK=90-\alpha \Rightarrow$ в $\triangle BNK$: $\angle NBK=90-\alpha$ и $\angle BNK=\alpha \Rightarrow \angle BKN=90°$

Имеем: NK и BL - высоты в $\triangle ABN \Rightarrow BKLN$ - вписанный четырехуг.,
т.к. $\angle BKN=\angle BLN=90°$ и опир. на одну дугу $\Rightarrow \angle BNA+\angle BKL=180°$

$\angle BKL+\angle AKL=180° \Rightarrow \angle AKL=\angle BNA=45°$. Рассмотрим $\triangle AKL$ и $\triangle ABN$:

$\angle AKL=\angle BNA$ и $\angle BAN$-общий $\Rightarrow \angle ALK=\angle ABN \Rightarrow \triangle AKL\sim\triangle ABN \Rightarrow$

$\frac{KL}{BN}=\frac{AL}{BA}=\cos(\angle BAL)$; $\cos(\angle BAL)=\cos(\alpha+45°)$.

$BC=1$; $CA=3 \Rightarrow AB=\sqrt{BC^2+AC^2}=\sqrt{10} \Rightarrow \cos\alpha=\frac{AC}{AB}=\frac{3}{\sqrt{10}}$; $\sin\alpha=\frac{BC}{AB}=\frac{1}{\sqrt{10}}$

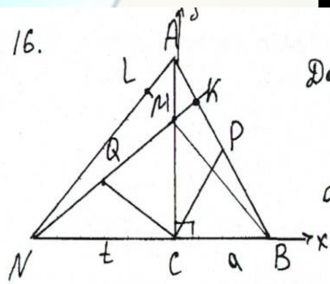
$\cos(\angle BAL)=\cos(\alpha+45°)=\cos\alpha\cos45°-\sin\alpha\sin45°=\frac{3}{\sqrt{10}}\cdot\frac{\sqrt2}{2}-\frac{1}{\sqrt{10}}\cdot\frac{\sqrt2}{2}=\frac{1}{\sqrt5}$

$\frac{KL}{BN}=\cos(\angle BAL)=\frac{1}{\sqrt5} \Rightarrow KL=\frac{BN}{\sqrt5}=\frac{BC+CN}{\sqrt5}=\frac{BC+CA}{\sqrt5}=\frac{4}{\sqrt5}$

Ответ: $KL=\frac{4}{\sqrt5}$

Профильный ЕГЭ. Задание 16

16.



Дано: ABC-прям. △, $M \in AC$, $N \in$ прод. BC, $CM = BC$, $CN = AC$.

а) CP-медиана $\triangle ABC$, CQ-медиана $\triangle NCM$.

Доказать: $CP \perp CQ$.

Доказательство:

Введём систему координат с центром в точке C как показано на рисунке. Пусть $BC = CM = a$; $CN = AC = t$.

$A(0;t)$, $B(a;0)$, $P = \left(\frac{0+a}{2}; \frac{t+0}{2}\right) = \left(\frac{a}{2}; \frac{t}{2}\right)$;

$M(0;a)$, $N(-t;0)$, $Q = \left(\frac{0-t}{2}; \frac{a+0}{2}\right) = \left(-\frac{t}{2}; \frac{a}{2}\right)$

Зададим прямую QC уравнением $y_1 = k_1x + b_1$:

$Q: \begin{cases} \frac{a}{2} = k_1 \cdot \left(-\frac{t}{2}\right) + b_1 \\ 0 = k_1 \cdot 0 + b_1 \Rightarrow b_1 = 0 \end{cases}$ (C) $\frac{a}{2} = -k_1 \cdot \frac{t}{2} \Rightarrow k_1 = -\frac{a}{t}$.

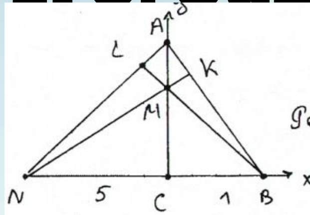
Тогда $y_1 = -\frac{a}{t}x$ - уравнение QC.

Зададим прямую PC уравнением $y_2 = k_2x + b_2$:

$P: \begin{cases} \frac{t}{2} = k_2 \cdot \frac{a}{2} + b_2 \\ 0 = k_2 \cdot 0 + b_2 \Rightarrow b_2 = 0 \end{cases}$ (C) $\frac{t}{2} = k_2 \cdot \frac{a}{2} \Rightarrow k_2 = \frac{t}{a}$

Тогда $y_2 = \frac{t}{a}x$ - уравнение PC

Заметим, что $k_1 \cdot k_2 = -\frac{a}{t} \cdot \frac{t}{a} = -1 \Rightarrow$ прямые y_1 и y_2 перпендикулярны $\Rightarrow CP \perp CQ$. ч.т.д.



б) $MN \cap AB = K$, $BM \cap AN = L$, $BC = 1$, $AC = 5$.

Найти: KL.

Решение:

Воспользуемся системой координат с уже известными данными. $a = 1$; $t = 5$.

$M(0;1)$ $N(-5;0)$ Зададим прямую MN ур. $y_3 = k_3x + b_3$:

$M: \begin{cases} 1 = k_3 \cdot 0 + b_3 \Rightarrow b_3 = 1 \\ 0 = -5 \cdot k_3 + b_3 \end{cases}$ (N) $5k_3 = 1 \Rightarrow k_3 = \frac{1}{5}$ $y_3 = \frac{1}{5}x + 1$ — MN.

$A(0;5)$ $B(1;0)$ Зададим прямую AB ур. $y_4 = k_4x + b_4$:

$A: \begin{cases} 5 = k_4 \cdot 0 + b_4 \Rightarrow b_4 = 5 \\ 0 = k_4 \cdot 1 + b_4 \end{cases}$ (B) $k_4 = -5$ $y_4 = -5x + 5$ — AB

$AB \cap MN = K$:

$\begin{cases} y_3 = \frac{1}{5}x + 1 \\ y_4 = -5x + 5 \end{cases}$ $\begin{cases} \frac{1}{5}x + 1 = -5x + 5 \\ y_4 = -5x + 5 \end{cases}$ $\begin{cases} x = \frac{10}{13} \\ y = \frac{15}{13} \end{cases}$ $K\left(\frac{10}{13}; \frac{15}{13}\right)$

$B(1;0)$ $M(0;1)$ Зададим прямую BM ур. $y_5 = k_5x + b_5$:

$B: \begin{cases} 0 = k_5 \cdot 1 + b_5 \\ 1 = 0 \cdot k_5 + b_5 \Rightarrow b_5 = 1 \end{cases}$ (M) $k_5 = -1$ $y_5 = -x + 1$ — BM

$A(0;5)$ $N(-5;0)$ Зададим прямую AN ур. $y_6 = k_6x + b_6$:

$A: \begin{cases} 5 = k_6 \cdot 0 + b_6 \Rightarrow b_6 = 5 \\ 0 = -5k_6 + b_6 \end{cases}$ (N) $5k_6 = 5 \Rightarrow k_6 = 1$ $y_6 = x + 5$ - AN

$BM \cap AN = L$:

$\begin{cases} y_5 = -x + 1 \\ y_6 = x + 5 \end{cases}$ $\begin{cases} -x + 1 = x + 5 \\ y_6 = x + 5 \end{cases}$ $\begin{cases} x = -2 \\ y = 3 \end{cases}$ $L(-2;3)$

$K\left(\frac{10}{13}; \frac{15}{13}\right)$ $L(-2;3)$

$KL^2 = \left(\frac{10}{13} + 2\right)^2 + \left(\frac{15}{13} - 3\right)^2 = \left(-\frac{36}{13}\right)^2 + \left(\frac{24}{13}\right)^2 = \frac{12^2 \cdot 9 + 12^2 \cdot 4}{13^2} = \frac{12^2 \cdot 13}{13^2} =$

$= \frac{12^2}{13}$; $KL = \frac{12}{\sqrt{13}}$.

Ответ: $\frac{12}{\sqrt{13}}$.

вычислительные ошибки

Профильный ЕГЭ. Задание 16

б) Решение.

$\triangle NAC$ – прямоугольный (по определению)

$NA = \sqrt{AC^2 + NC^2} = \sqrt{2AC^2} = \sqrt{2\cdot 25} = 5\sqrt{2}$ (по теореме Пифагора)

$MC = CB = 3$

$\frac{NL}{LA}\cdot\frac{AM}{MC}\cdot\frac{CB}{NB} = 1$ (по теореме Менелая)

$\frac{NL}{LA} = \frac{\cancel{5\cdot 3}}{\cancel{3}}\cdot\frac{3}{\cancel{8}_4} = 1$

$\frac{NL}{LA} = \frac{4}{1}$

$NL = 4LA$

$NL + LA = NA$

$5LA = NA$

$LA = \frac{5\sqrt{2}}{5} = \sqrt{2}$

$NL = 4\sqrt{2}$

$\triangle CMB$ – равнобедренный и прямоугольный
$\triangle NAC$ – равнобедренный
} по определению

$\angle CMB = \angle MBC \quad \angle CMB + \angle MBC = 90^\circ$
$\angle ANC = \angle NAC \quad \angle ANC + \angle NAC = 90^\circ$
} по теореме о сумме острых углов в прямоугольном треугольнике

$\angle CMB = \angle MBC = \angle ANC = \angle NAC = 45^\circ$

$\angle NMC = \angle AMK$ (вертикальные)

$\angle MAK = \angle MNC = \alpha \quad \triangle NMC \sim \triangle MAK$ (по признаку по 2-м углам)

$\angle LMA = \angle CMB$ (вертикальные)

$\angle LAM = \angle MBC = 45^\circ \quad \triangle LAM \sim \triangle CMB$ (по признаку, по 2-м углам)

$\angle ALM = \angle MCB = \angle MKA = \angle MCN = 90^\circ$

$\angle LMA + \angle AMK = 45^\circ + 90^\circ - \alpha = 135^\circ - \alpha$

$LB = \sqrt{NB^2 - NL^2} = \sqrt{64 - 32} = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$

$NM = AB = \sqrt{AC^2 + CB^2} = \sqrt{25+9} = \sqrt{34}$

$LM = \sqrt{-NL^2 + NM^2} = \sqrt{34 - 32} = \sqrt{2}$

$\frac{BK}{KA}\cdot\frac{MA}{MC}\cdot\frac{NC}{NB} = 1$ (по теореме Менелая)

$\frac{BK}{KA}\cdot\frac{\cancel{2}}{3}\cdot\frac{5}{\cancel{8}_4} = 1$

$\frac{BK}{KA} = \frac{12}{5}$

$BK = \frac{12KA}{5}$

$BK + KA = AB$

$KA + \frac{12KA}{5} = \sqrt{34}$

$\frac{17KA}{5} = \sqrt{34}$

$KA = \frac{5\sqrt{17}\sqrt{2}}{17}$

$MB = LB - LM = 4\sqrt{2} - \sqrt{2} = 3\sqrt{2}$

$\triangle MKB$ – прямоугольный (по определению)

$KA = \frac{5\sqrt{2}}{\sqrt{17}}$

$MK = \sqrt{MB^2 - KB^2}$ (по теореме Пифагора)

$KB = \frac{12\cdot 5\sqrt{2}}{5\sqrt{17}}$

$MK = \sqrt{9\cdot 2 - \frac{144\cdot 2}{17}} = \sqrt{\frac{306-288}{17}} = \sqrt{\frac{18}{17}}$

$KB = \frac{12\sqrt{2}}{\sqrt{17}}$

$MK = \frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{17}}$

$LK^2 = LM^2 + MK^2 - 2\cdot LM\cdot MK\cos LMK$

$\cos LMK = \cos(135 - \alpha) = \cos 135\cos\alpha + \sin 135\sin\alpha = -\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\alpha + \frac{1}{\sqrt{2}}\sin\alpha$

$\sin\alpha = \frac{BC}{AB} = \frac{3}{\sqrt{34}}$

$\cos\alpha = \frac{AC}{AB} = \frac{5}{\sqrt{34}}$

$\cos(135 - \alpha) = -\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{5}{\sqrt{34}} + \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{3}{\sqrt{34}} = -\frac{2}{2\sqrt{17}} = -\frac{1}{\sqrt{17}}$

$KL^2 = 2 + \frac{9\cdot 2}{17} - 2\cdot\sqrt{2}\cdot\frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{17}}\left(-\frac{1}{\sqrt{17}}\right) = \frac{34+18+12}{17} = \frac{64}{17}$

$KL = \frac{8}{\sqrt{17}} = \frac{8\sqrt{17}}{17}$

Ответ: б) $\frac{8\sqrt{17}}{17}$

неверное использование свойств медианы, проведенной в прямоугольном треугольнике из прямого угла

Профильный ЕГЭ по математике

Задания по алгебре и началам анализа

Уметь

решать уравнения и неравенства

выполнять действия с функциями

выполнять вычисления и преобразования

строить и исследовать простейшие математические модели

№ 5 – решение простейшего иррационального уравнения;

№ 7 – связь свойств функции и ее производной;

№ 9 – нахождение значений функций;

№ 11 – текстовая задача на движение;

№ 12 – определение точек экстремума данной функции;

№ 13 – тригонометрическое уравнение с отбором корней;

№ 15 – неравенство, содержащее логарифмы;

№ 18 – задача с параметром;

№ 19 – логическая задача с целыми числами.

Профильный ЕГЭ. Задание 5

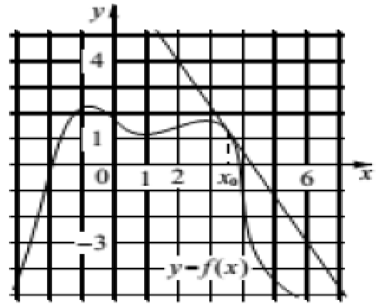
2019. Найдите корень уравнения $\left(\frac{1}{4}\right)^{x-8} = 64$

2020. Найдите корень уравнения $\sqrt{36-4x} = 2$.

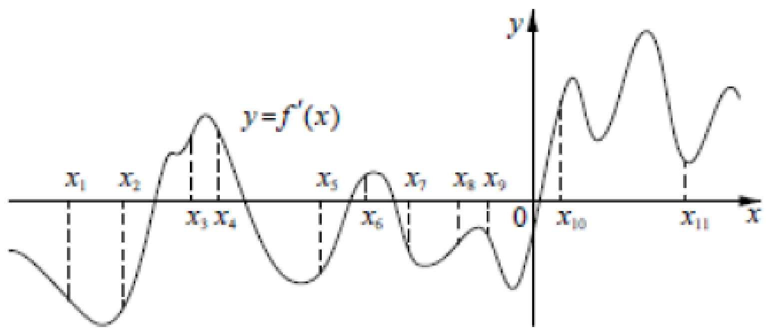
2019 год	2020 год
92,16%	96,63%

Профильный ЕГЭ. Задание 7

2019. На рисунке изображен график функции $y = f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0. Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке x_0.



2020. На рисунке изображен график функции $y = f'(x)$ - производной функции f(x). На оси абсцисс отмечено одиннадцать точек x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_9, x_{10}, x_{11}. Сколько из этих точек принадлежит промежуткам убывания функции f(x)?



2019 год	2019 год
54,83%	62,89%

Профильный ЕГЭ. Задание 9

2019. Найдите значение выражения: $16log_7\sqrt[4]{7}$

2020. Найдите $\sin\alpha$, если $\cos\alpha=-\sqrt{21}/5$ и $\alpha\in(\pi/2;\pi)$.

2019 год	2020 год
78,27%	72,14%

Профильный ЕГЭ. Задание 11

2019. Два велосипедиста одновременно отправились в 108-километровый пробег. Первый ехал со скоростью, на 3км/ч большей, чем скорость второго, и прибыл к финишу на 3 часа раньше второго. Найдите скорость велосипедиста, пришедшего к финишу первым.

2020. Пристани А и В расположены на озере, расстояние между ними равно 264 км. Баржа отправилась с постоянной скоростью из А в В. На следующий день после прибытия она отправилась тем же путём обратно со скоростью на 2 км/ч больше прежней, сделав по пути остановку на 1 час. В результате она затратила на обратный путь столько же времени, сколько на путь из А в В. Найдите скорость баржи на пути из А в В. Ответ дайте в км/ч.

2019 год	2020 год
68,42%	66,01%

Профильный ЕГЭ. Задание 12

2019. Найдите точку минимума функции $y = x^{3/2} - 9x + 21$.

2020. Найдите точку минимума функции $y = 5x\text{-}ln(x+3)^5+6$.

2019 год	2020 год
59,19%	52,91%

Профильный ЕГЭ. Задание 13

2019

а) Решите уравнение

$$6\cos^2 x + 5\sin x - 2 = 0.$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{5\pi}{2}; -\pi\right]$.

2020

а) Решите уравнение $2\sin^2(\pi+x)-\cos(\pi/2-x)=0$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[-5\pi/2; -\pi]$.

2019	2020
50,08%	27,11%

Профильный ЕГЭ. Задание 13

досрочный

а) Решите уравнение

$$2\cos^3 x+\sqrt{3}\cos^2 x+2\cos x+\sqrt{3}=0.$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-2\pi;-\frac{\pi}{2}\right]$.

резерв

а) Решите уравнение

$$16^{\sin x}=\left(\frac{1}{4}\right)^{2\sin 2x}.$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[2\pi;\frac{7\pi}{2}\right]$.

Профильный ЕГЭ. Задание 13

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте *а* ИЛИ получены неверные ответы из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения обоих пунктов: пункта *а* и пункта *б*	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

	1 балл	*2 балла*
2019 год	**9,06%**	**41,02%**
2020 год	**4,73%**	**22,38%**

Профильный ЕГЭ. Задание 13

неумение использовать формулы приведения

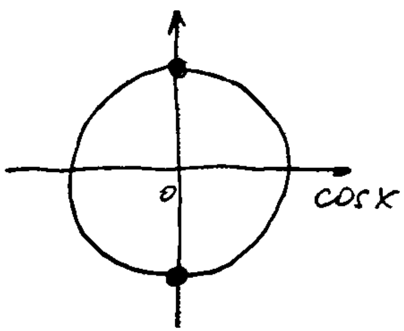
а) $2\sin^2\left(\frac{3\pi}{2}+x\right)+\cos(\pi-x)=0$

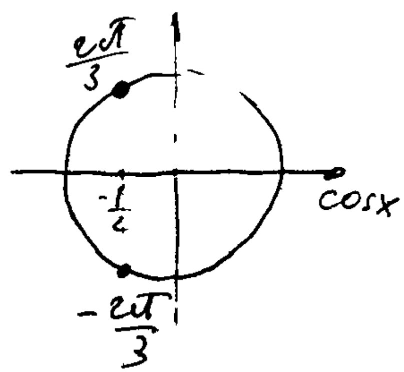
$-2\cos^2 x-\cos x=0 \quad |\cdot(-1)$

$2\cos^2 x+\cos x=0$

$\cos x(2\cos x+1)=0$

$\cos x=0$ или $\cos x=-\frac{1}{2}$





$x=\frac{\pi}{2}+\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$ $\qquad$ $x=\pm\frac{2\pi}{3}+2\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$

Профильный ЕГЭ. Задание 13

незнание формул для решения простейших тригонометрических уравнений

$$2\sin^2(x+\pi) - \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = 0$$

а)

$$2\sin^2 x - \sin x = 0$$

$$\sin x (2\sin x - 1) = 0$$

$\sin x = 0$ или $2\sin x - 1 = 0$

$x = 0$

$$\sin x = \frac{1}{2}$$

$$x = \pm\frac{\pi}{6} + 2\pi k, \; k \in Z$$

- незнание табличных значений тригонометрических функций

Профильный ЕГЭ. Задание 13

неумение отбирать решения тригонометрического уравнения с помощью тригонометрической окружности, решения неравенств или методом перебора

а) $2\cos^2(\pi - x) - \sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = 0$

$2\cos^2(\pi - x) + \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = 0$

$2\cos^2 x + \cos x = 0$

$\cos x(2\cos x + 1) = 0$

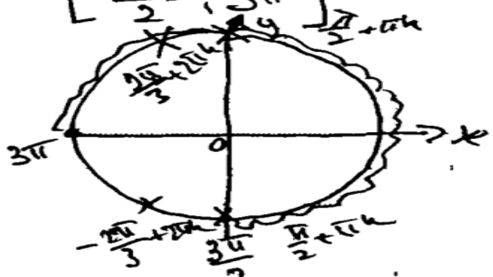
$\cos x = 0 \qquad 2\cos x + 1 = 0$

$x = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in Z \qquad \cos x = -\frac{1}{2}$

$x = \pm \arccos\left(-\frac{1}{2}\right) + 2\pi k, k \in Z$

$x = \pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi k, k \in Z$

б) $\left[\frac{3\pi}{2}; 3\pi\right]$



$x = \frac{3\pi}{2}; \frac{5\pi}{2}; \frac{8\pi}{3}$

Ответ. а) $x = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in Z$

$x = \pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi k, k \in Z$

б) $\frac{3\pi}{2}; \frac{5\pi}{2}; \frac{8\pi}{3}$

Профильный ЕГЭ. Задание 13

вычислительные ошибки

а) $2\sin^2(x+\pi) - \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = 0$ $\left[-\frac{5\pi}{2}; -\pi\right]$.

$-2\sin^2 x + \sin x = 0$

$\sin x = t$

$-2t^2 + t = 0$

$2t^2 - t = 0$

$D = 1 - 4 \cdot 2 \cdot 0 = 1$

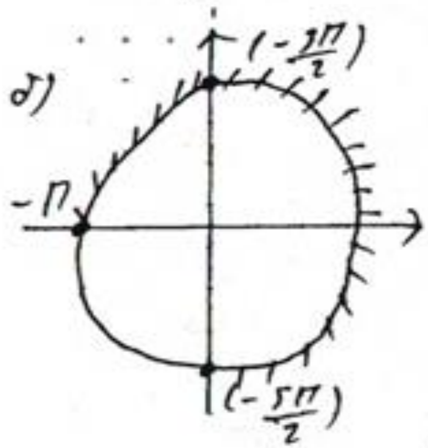
$x_1 = \frac{1+1}{2} = 1$

$x_2 = \frac{1-1}{2} = 0$

$\sin x = 1$ $\sin x = 0$

$x_1 = \frac{\pi}{2} + 2\pi k,\ k \in Z$ $x_2 = \pi n,\ n \in Z$.

б)



$x_1 = -\frac{5\pi}{2} + \pi = -\frac{5\pi}{2} + \frac{2\pi}{2} = -\frac{3\pi}{2}$

$x_2 = -\frac{3\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = -\frac{2\pi}{2} = -\pi$

Ответ: а) $x_1 = \frac{\pi}{2} + 2\pi k,\ k \in Z$; $x_2 = \pi n,\ n \in Z$.

б) $x_1 = -\frac{3\pi}{2}$; $x_2 = -\pi$.

Профильный ЕГЭ. Задание 15

2019

Решите неравенство $\log_{0,6}(18-18x) \le \log_{0,6}\left(x^2-6x+5\right)+\log_{0,6}(x+4)$.

2020

Решите неравенство $x^2\log_{512}(x+7) \le \log_2(x^2+14x+49)$.

Ответ: $(-7;-6]$; $\left[-3\sqrt{2};3\sqrt{2}\right]$

2019	2020
18,61%	12,12%

Профильный ЕГЭ. Задание 15

досрочный

Решите неравенство $\log_5\left((3-x)\left(x^2+2\right)\right) \geq \log_5\left(x^2-7x+12\right)+\log_5(5-x)$

резерв

Решите неравенство $(4x-7)\cdot\log_{x^2-4x+5}(3x-5)\geq 0$.

Профильный ЕГЭ. Задание 15

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Обоснованно получен ответ, отличающийся от верного исключением точек -6, $-3\sqrt{2}$ и/или $3\sqrt{2}$, ИЛИ получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

	1 балл	*2 балла*
2019 год	**2,18%**	**16,42%**
2020 год	**1,16%**	**10,96%**

Профильный ЕГЭ. Задание 15

$$x^2 \log_{2^9}(x+7) \le \log_2 (x+7)^2;$$

$$\frac{x^2}{9}\cdot \log_2(x+7) \le 2\log_2|x+7| \quad |\cdot 9;$$

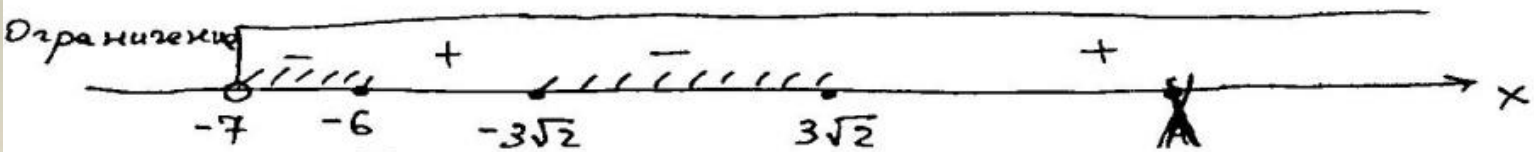
$$x^2\log_2(x+7) - 18\log_2(x+7) \le 0;$$

$$\log_2(x+7)\cdot(x^2-18) \le 0;$$

$$\log_2(x+7)\cdot(x-3\sqrt{2})(x+3\sqrt{2}) \le 0;$$

Решим обобщённым методом интервалов:

$\log_2(x+7)=0$	$x-3\sqrt{2}=0$	$x+3\sqrt{2}=0$
$x+7=1$	$x=3\sqrt{2}$	$x=-3\sqrt{2}$
$x=-6$	$3\sqrt{2}=\sqrt{18}<6=\sqrt{36}$	$-3\sqrt{2}=-\sqrt{18}>-7=-\sqrt{49}$



Если $x\in[3\sqrt{2};+\infty)$, то знаки $+\,+\,+ \Rightarrow +$

Если $x\in[-3\sqrt{2};3\sqrt{2})$, то знаки $+\,-\,+ \Rightarrow -$

Если $x\in[-6;-3\sqrt{2})$, то знаки $+\,-\,- \Rightarrow +$

Если $x\in(-7;-6)$, то знаки $-\,-\,- \Rightarrow -$

Ответ: $x\in(-7;-6]\cup[-3\sqrt{2};3\sqrt{2}]$.

Профильный ЕГЭ. Задание 15

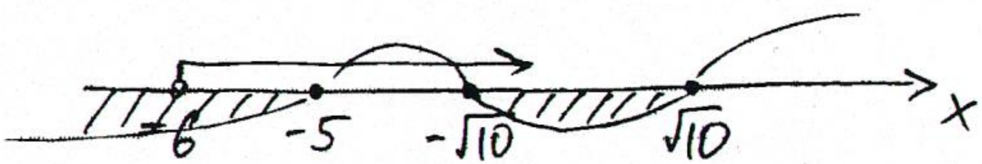
$$x^2 \log_{243}(x+6) \le \log_3(x^2+12x+36)$$

$$x^2 \log_{3^5}(x+6) \le \log_3(x+6)^2$$

$$\left(\frac{x^2}{5}-2\right) \log_3(x+6) \le 0$$

$$(x^2-10)\left(\log_3(x+6)-\log_3 1\right) \le 0$$

$$\begin{cases} (x-\sqrt{10})(x+\sqrt{10})(3-1)(x+5) \le 0 \\ x+6>0 \end{cases}$$



$$\left[\begin{array}{l} -6 < x \le -5 \\ -\sqrt{10} \le x \le \sqrt{10} \end{array}\right.$$

Ответ: $(-6; -5] \cup [-\sqrt{10}; \sqrt{10}]$

Профильный ЕГЭ. Задание 15

15

$$x^2\log_{512}(x+7)\le\log_2(x^2+14x+49)$$

$$\frac{x^2}{9}\log_2(x+7)\le\log_2(x+7)^2$$

$$\log_2(x+7)^{\frac{x^2}{9}}\le\log_2(x+7)^2$$

Ограничения на неравенство:

$$\begin{cases}x+7>0\\x^2+14x+49>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x>-7\\(x+7)^2>0\end{cases}\Leftrightarrow x>-7$$

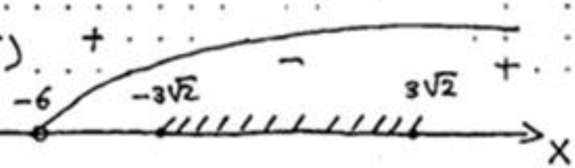
Основание лог. функций >1, тогда получаем:

$$(x+7)^{\frac{x^2}{9}}\le(x+7)^2$$

Это неравенство эквивалентно следующей совокупности:

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x+7>1\\\frac{x^2}{9}\le2\end{cases}\\\begin{cases}x+7<1\\\frac{x^2}{9}\ge2\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x>-6\\x^2-18\le0\end{cases}\\\begin{cases}x<-6\\x^2-18\ge0\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x>-6\\(x-3\sqrt2)(x+3\sqrt2)\le0\end{cases}\quad\mathrm{I}\\\begin{cases}x<-6\\(x-3\sqrt2)(x+3\sqrt2)\ge0\end{cases}\quad\mathrm{II}\end{array}\right.$$

I)



$x\in[-3\sqrt2;\,3\sqrt2]$

II)

$x\in(-\infty;\,-6)$

Учитывая ограничение, получаем: $x\in(-7;-6)\cup[-3\sqrt2;\,3\sqrt2]$

ОТВЕТ: $x\in(-7;-6)\cup[-3\sqrt2;\,3\sqrt2]$

Профильный ЕГЭ. Задание 15

$x^2 \log_{2^9}(x+7) \le \log_2 (x+7)^2$ ОДЗ:

$\begin{cases} x+7>0 \\ \cancel{(x+7)^2} \\ x^2+14x+49>0 \end{cases}$

$\frac{x^2}{9}\log_2(x+7) - 2\log_2|x+7| \le 0$

$|x+7| = x+7$, т.к. по ОДЗ

$x+7>0$

$\log_2(x+7)\left(\frac{x^2}{9}-2\right) \le 0$

$\begin{cases} x>-7 \\ (x+7)^2>0 \end{cases}$

$\begin{cases} x>-7 \\ x \ne 7 \end{cases}$

$\boxed{\begin{array}{l} ① \left[\begin{array}{l} \log_2(x+7) \le 0 \\ \frac{x^2}{9} - 2 \le 0 \end{array}\right. \\ ② \end{array}}$

неумение применять функциональный метод интервалов

① $\log_2(x+7) \le 0$

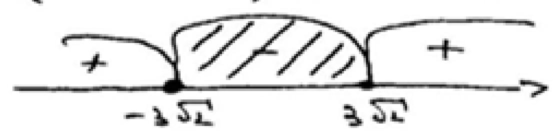
$x+7 \le 1$

$x \le -6$

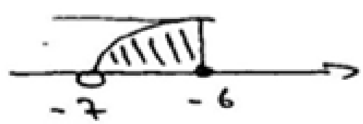
② $\frac{x^2}{9} - 2 \le 0$

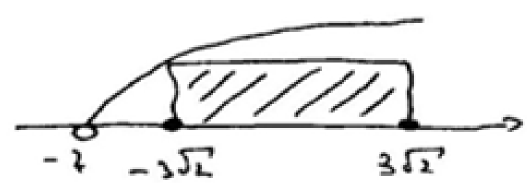
$\frac{x^2-18}{9} \le 0$

$(x-3\sqrt{2})(x+3\sqrt{2}) \le 0$



Учтем ОДЗ:





$x \in (-7; -6]$

$x \in [-3\sqrt{2}; 3\sqrt{2}]$

Ответ: $x \in (-7;-6] \cup [-3\sqrt{2}; 3\sqrt{2}]$

Профильный ЕГЭ. Задание 15

$x^2 \cdot \log_{512}(x+7) \le \log_2(x^2+14x+49)$

$x^2 \cdot \log_{2^9}(x+7) \le \log_2(x^2+14x+49)$

$\frac{x^2}{9} \cdot \log_2(x+7) \le \log_2(x^2+14x+49)$

$\frac{x^2}{9} \cdot \log_2(x+7) \le \underline{\frac{1}{2}} \cdot \log_2(x+7)$

неучет ОДЗ

незнание свойств логарифмов;

$x^2 \log_{343}(x+4) \le \log_7(x^2+8x+16) \quad | : x^2$

Т.к. $x^2>0$ при любом x, то на него можно сократить нера-венство и это никак не повлияет на его знак

$\log_{343}(x+4) \le \log_7(x^2+8x+16)$

$\log_{7^3}(x+4) \le \log_7(x+4)^2$

$\underline{\log_7(x+4)^3} \le \log_7(x+4)^2$

Профильный ЕГЭ. Задание 18

2019

Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$\frac{x^2-4x+a^2-2a}{x^2+ax-6a^2}=0$$

имеет ровно два различных корня.

2020

Найдите все значения а, при каждом из которых система уравнений $\begin{cases}\sqrt{36-y^2}=\sqrt{36-a^2x^2}\\ x^2+y^2=4x+6y\end{cases}$ имеет ровно два различных решения

Ответ: $a<-3$; $a=-\frac{1}{3}$; $a=0$; $a=\frac{1}{3}$; $a>3$.

2019	2020
8,07%	4,47%

Профильный ЕГЭ. Задание 18

досрочный

Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$\frac{9x^2-a^2}{x^2+8x+16-a^2}=0$$

имеет ровно два различных корня.

резерв

Найдите все значения a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases}\dfrac{\left(y^2-xy-7y+4x+12\right)\sqrt{x+4}}{\sqrt{7-y}}=0,\\ a=x+y\end{cases}$$

имеет единственное решение.

Профильный ЕГЭ. Задание 18

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	4
С помощью верного рассуждения получено множество значений a, отличающееся от искомого только включением / исключением не более двух из пяти точек: $a=-3$, $a=-\frac{1}{3}$, $a=0$, $a=\frac{1}{3}$, $a=3$	3
С помощью верного рассуждения получено множество значений a, отличающееся от искомого только включением / исключением более двух из пяти точек: $a=-3$, $a=-\frac{1}{3}$, $a=0$, $a=\frac{1}{3}$, $a=3$, ИЛИ получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом верно выполнены все шаги решения	2
Задача верно сведена к исследованию взаимного расположения окружности и прямых (аналитически или графически)	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

	1 балл	2 балла	3 балла	4 балла
2019 год	4,7%	1,0%	0,19%	2,18%
2020 год	3,08%	0,4%	0,38%	0,61%

Профильный ЕГЭ. Задание 19

2019

В ящике лежит 87 фруктов, масса каждого из которых выражается целым числом граммов. В ящике есть хотя бы два фрукта различной массы, а средняя масса всех фруктов равна 100 г. Средняя масса фруктов, масса каждого из которых меньше 100 г, равна 94 г. Средняя масса фруктов, масса каждого из которых больше 100 г, равна 127 г.

а) Могло ли в ящике оказаться поровну фруктов массой меньше 100 г и фруктов массой больше 100 г?

б) Могло ли в ящике оказаться меньше 9 фруктов, масса каждого из которых равна 100 г?

в) Какую наибольшую массу может иметь фрукт в этом ящике?

2020

На доске написано несколько различных натуральных чисел, в записи которых могут быть только цифры 4 и 9 (возможно, только одна из этих цифр).

а) Может ли сумма этих чисел быть равна 107?

б) Может ли сумма этих чисел быть равна 289?

в) Какое наименьшее количество чисел может быть на доске, если их сумма равна 3986?

2019	2020
5,95%	30,62%

Профильный ЕГЭ. Задание 19

досрочный

В течение n дней каждый день на доску записывают натуральные числа, каждое из которых меньше 6. При этом каждый день (кроме первого) сумма чисел, записанных на доску в этот день, больше, а количество меньше, чем в предыдущий день.

а) Может ли n быть больше 5?

б) Может ли среднее арифметическое чисел, записанных в первый день, быть меньше 3, а среднее арифметическое всех чисел, записанных за все дни, быть больше 4?

в) Известно, что сумма чисел, записанных в первый день, равна 6. Какое наибольшее значение может принимать сумма всех чисел, записанных за все дни?

резерв

В шахматы можно выиграть, проиграть или сыграть вничью. Шахматист записывает результат каждой сыгранной им партии и после каждой партии подсчитывает три показателя: «победы» — процент побед, округлённый до целого, «ничьи» — процент ничьих, округлённый до целого, и «поражения», равные разности 100 и суммы показателей «побед» и «ничьих». (Например, число 13,2 округляется до 13, число 14,5 округляется до 15, число 16,8 округляется до 17.)

а) Может ли в какой-то момент показатель «побед» равняться 17, если было сыграно менее 50 партий?

б) Может ли после выигранной партии увеличиться показатель «поражений»?

в) Одна из партий была проиграна. При каком наименьшем количестве сыгранных партий показатель «поражений» может быть равным 1?

Профильный ЕГЭ. Задание 19

Содержание критерия	Баллы
Верно получены все перечисленные (см. критерий на 1 балл) результаты	4
Верно получены три из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	3
Верно получены два из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	2
Верно получен один из следующих результатов: — обоснованное решение пункта *а*; — обоснованное решение пункта *б*; — искомая оценка в пункте *в*; — пример в пункте *в*, обеспечивающий точность предыдущей оценки	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

	1 балл	2 балла	3 балла	4 балла
2019 год	4,22%	1,34%	0,19%	0,19%
2020 год	19,46%	9,05%	1,3%	0,81%

Профильный ЕГЭ по математике

Динамика изменения процента решаемости заданий с развернутым решением

	13	14	15	16	17	18	19
2019 год	50,1	2,4	18,6	1,7	17,4	8,1	6,0
2020 год	27,1	1,7	12,1	8,9	29,1	4,5	30,6

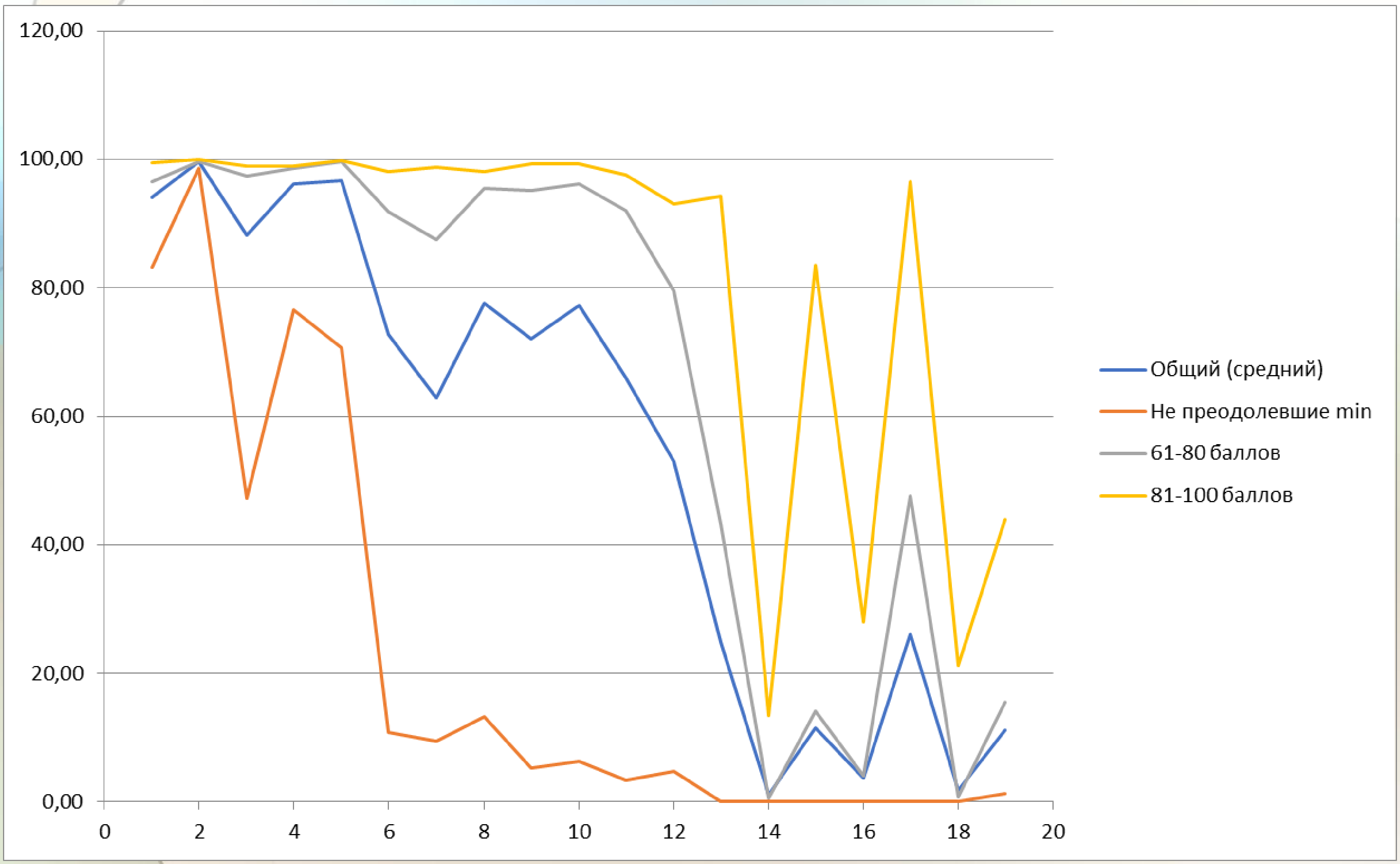
Проценты выполнения заданий по профильной математике

№ задания	Итого (средний)	В группе не преодолевших min балл	В группе 61-80 баллов	В группе 81-100 баллов
1	94,05	83,11	96,47	99,50
2	99,59	98,68	99,67	100,00
3	88,12	47,23	97,37	99,01
4	96,09	76,52	98,64	99,01
5	96,63	70,71	99,67	99,75
6	72,80	10,82	91,87	98,01
7	62,89	9,50	87,54	98,76
8	77,60	13,19	95,49	98,01
9	72,14	5,28	95,06	99,26
10	77,26	6,33	96,10	99,26
11	66,01	3,43	92,05	97,52
12	52,91	4,75	79,55	93,05

Проценты выполнения заданий по профильной математике

№ задания	Итого (средний)	В группе не преодолевших min балл	В группе 61-80 баллов	В группе 81-100 баллов
13	**24,92**	**0,00**	**43,30**	**94,29**
14	**1,19**	**0,00**	**0,56**	**13,40**
15	**11,54**	**0,00**	**14,13**	**83,50**
16	**3,77**	**0,00**	**4,09**	**28,04**
17	**26,05**	**0,09**	**47,63**	**96,53**
18	**1,87**	**0,00**	**0,83**	**21,28**
19	**11,15**	**1,32**	**15,59**	**43,98**

Проценты выполнения заданий по профильной математике



Спасибо за внимание!